



Super-élément fini de tôles rivetées pour le calcul des structures

Claire Hennuyer

► To cite this version:

Claire Hennuyer. Super-élément fini de tôles rivetées pour le calcul des structures. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université de Valenciennes, 2015. Français. NNT : . tel-01199799

HAL Id: tel-01199799

<https://theses.hal.science/tel-01199799>

Submitted on 22 Sep 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat
Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de
VALENCIENNES ET DU HAINAUT-CAMBRESIS

Spécialité :
Mécanique

Claire HENNUYER

Soutenue le 24/06/2015, à Lille.

Ecole doctorale :

Sciences Pour l'Ingénieur (SPI)

Laboratoires :

Onera, The French Aerospace Lab

Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique Industrielles et Humaines (LAMIH)

Super-élément fini de tôles rivetées
pour le calcul des structures

JURY

Jean-Philippe PONTHOT	Professeur, Université de Liège	Rapporteur
Nicolas MOËS	Professeur, École Centrale de Nantes	Rapporteur
Alain COMBESURE	Professeur, INSA de Lyon	Président
Éric MARKIEWICZ	Professeur, Université de Valenciennes	Directeur
Bertrand LANGRAND	Ingénieur-docteur (HDR), Onera Lille	Co-Directeur
Nicolas LECONTE	Maître de conférences, Université de Valenciennes	Examineur
Johann RANNOU	Ingénieur-docteur, Onera Châtillon	Invité

*À mes parents,
À Alexandre.*

*« In all your ways acknowledge Him, and
He shall direct your paths. »*

Remerciements

Ce mémoire de thèse n'aurait pas pu voir le jour sans le soutien, l'aide ou simplement la présence de certaines personnes. Je les remercie par ces quelques mots.

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à Nicolas Moës et Jean-Philippe Ponthot qui m'ont fait l'honneur de rapporter ces travaux de recherche. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail de thèse, pour le temps consacré à la lecture du manuscrit, mais aussi pour leurs critiques scientifiques. Je remercie également l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté de participer à ma soutenance.

Ensuite, je tiens à remercier sincèrement mes encadrants pour la confiance qu'ils m'ont accordé, à moi qui n'en avais pas beaucoup, et pour le soutien qu'ils m'ont témoigné tout au long de ces trois années, et aussi durant la période de rédaction du manuscrit. Je remercie particulièrement Éric Markiewicz, mon directeur de thèse, pour tous ses conseils précieux et le partage de son expérience ; Bertrand Langrand, mon co-encadrant à l'Onera, pour sa disponibilité, son écoute et les discussions scientifiques mais pas que ; et Nicolas Leconte, mon co-encadrant au LAMIH, pour le temps qu'il a consacré, notamment les journées à travailler à mes côtés, c'était vraiment un plus de l'avoir dans mon encadrement.

Je remercie la Région Nord-Pas de Calais ainsi que l'Onera pour le co-financement de ces travaux. Je remercie l'Onera Centre de Lille et son directeur Jean-Michel Wauquier pour m'avoir accueilli dans son établissement. Je remercie également la Branche Matériaux et Structures et son directeur scientifique Esteban Busso, le Département Aéroélasticité et Dynamique des Structures et son directeur Jean-Pierre Grisval, l'Unité Conception et Résistance Dynamique et son responsable Laurent Lefevre, le LAMIH et son directeur Thierry-Marie Guerra, ainsi que le CISIT pour leur contribution à la réalisation de cette thèse.

Par ailleurs, j'adresse mes vifs remerciements à Johann Rannou et Frédéric Feyel pour leur aide et leur contribution à l'implémentation du super-élément dans ZéBuLoN, qui ont ainsi permis l'aboutissement de ces travaux.

Un grand merci également à tous mes collègues de l'Onera Centre de Lille qui ont participé

de près ou de loin à ce que cette thèse se déroule dans d'agréables conditions. Merci à l'équipe du laboratoire, Alain, Jean-Michel, Jacky, Gérald, Mathieu, Nicolas, Loïc, où, c'est vrai, je n'ai pas mis assez souvent les pieds. Merci à mes voisins de bureau Jean-François, Jean-Luc P., Roland, Jean-Luc C., mais aussi à Éric D., Steve, Jacques, David, Didier, Bernard, Hughes. Je remercie également quelques collègues féminines : Florence pour sa jovialité et son aide au quotidien pour les tâches administratives ; et Laurence, documentaliste de l'établissement, pour sa disponibilité. J'ai également une pensée pour mes deux collègues de bureau doctorants avec qui j'ai partagé d'agréables moments au quotidien : Julien qui mettait chaque jour la barre un peu plus haute, et Estelle qui a apporté une touche féminine dans cet environnement scientifique un peu trop masculin. Un merci particulier à Vincent, avec qui j'ai partagé ces trois années de doctorat, avoir quelqu'un dans le même bateau était plutôt rassurant ; mais aussi à Thomas, qui a ramené un peu de Sud dans le Nord, pour toutes les discussions que nous avions le matin. Merci pour votre amitié et pour les bons moments passés ensemble.

Enfin, je termine par remercier mes proches pour leur soutien et leurs encouragements, mes amis de City Family ainsi que ma famille. Je remercie surtout mes parents qui ont toujours été là, dans les bons comme les mauvais moments, qui m'ont accompagnés durant toutes ces années d'étude et qui n'ont jamais douté de ma réussite. Et puis, je remercie Alexandre, l'homme de ma vie. Même si tu n'as pas toujours compris mes angoisses et mes craintes, tu as toujours été là pour moi et c'est tout ce qui compte. Tu es encore là pour moi aujourd'hui et je sais que tu seras là pour toujours mon amour, merci.

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	1
1 Synthèse bibliographique	9
1.1 Méthodes numériques pour la représentation des discontinuités	10
1.1.1 Méthode des Éléments Finis	10
1.1.2 Méthode des Éléments Finis étendue	12
1.1.3 Méthodes multi-échelles	13
1.1.4 Synthèse	15
1.2 Méthodes de décomposition de domaine	18
1.2.1 Méthodes avec recouvrement	18
1.2.2 Méthodes sans recouvrement	22
1.3 Formulation d'éléments finis à partir de principes variationnels	27
1.4 Super-éléments finis pour la modélisation des discontinuités	31
1.4.1 Modélisation des discontinuités géométriques	32
1.4.2 Modélisation des discontinuités matérielles	35
1.4.3 Synthèse	40
1.5 Présentation d'un super-élément hybride-Trefftz déplacement comportant un trou	40

1.5.1	Formulation du principe variationnel	41
1.5.2	Fonctions d'interpolation	43
1.5.3	Troncature des séries et nombre de nœuds	46
1.5.4	Conditions aux limites non homogènes sur le contour de la perforation	47
1.5.5	Résultats numériques	49
1.6	Présentation d'un super-élément semi-analytique comportant un trou . . .	51
1.7	Synthèse	53
2	Formulation d'un nouveau super-élément perforé avec des nœuds sur la perforation	55
2.1	Introduction	56
2.2	Formulation du principe variationnel	56
2.3	Définition des champs d'intérieur de domaine et du champ inter-éléments .	59
2.3.1	Expression du champ de déplacements inter-éléments	59
2.3.2	Détermination de la solution homogène et choix des fonctions d'interpolation	60
2.3.3	Analyse de solutions particulières de la littérature	61
2.3.4	Introduction des champs d'intérieur de domaine et du champ inter-éléments dans le principe variationnel	64
2.4	Calcul des fonctions d'interpolation en termes de degrés de liberté physiques	67
2.5	Construction de la matrice de rigidité et du vecteur chargement du super-élément perforé avec nœuds sur la perforation	69
2.6	Synthèse	73
3	Étude des fonctions d'interpolation du nouveau super-élément perforé avec nœuds sur la perforation	75
3.1	Introduction	76
3.2	Adaptation et application d'une méthode de reconstruction de champs pour l'étude des fonctions d'interpolation	76

3.2.1	Paramètres de l'étude	77
3.2.2	Post-traitement	79
3.3	Évaluation des fonctions d'interpolation à partir d'une solution analytique de référence	80
3.3.1	Analyse des résultats	80
3.3.2	Discussion sur les résultats numériques obtenus	85
3.4	Évaluation des fonctions d'interpolation à partir d'une solution numérique de référence	89
3.4.1	Analyse des résultats	89
3.4.2	Discussion sur l'amélioration de la précision des fonctions d'inter- polation calculées à l'ordre 8	94
3.5	Synthèse	97
4	Implémentation et évaluation du super-élément perforé avec nœuds sur la perforation	99
4.1	Introduction	100
4.2	Implémentation du super-élément perforé avec nœuds sur la perforation dans le code ZéBuLoN	100
4.3	Évaluation du nouveau super-élément perforé	107
4.3.1	Chargement externe	108
4.3.2	Chargement interne sur le trou	124
4.4	Synthèse	133
	Conclusion et perspectives	135
	Bibliographie	142
	Annexes	152
A	Liste des publications	153

B	Modélisation des assemblages rivetés dans les calculs de structures – Un historique	155
C	Le logarithme complexe	157
D	Influence de la distance de prélèvement	159
E	Expressions analytiques des champs de contraintes et de déplacements	161
F	Préconditionnement	165
G	Exemple de fichier .inp	167
H	Distribution du champ de déplacements obtenue avec le nouveau super-élément	169
I	Déplacements nodaux u_y obtenus avec le nouveau super-élément lorsque la perforation est soumise à une pression	177

Introduction

L'amélioration de la sécurité des passagers dans les transports aériens est une préoccupation constante pour tous les acteurs du secteur aéronautique. De grands programmes de recherches et d'innovations sont donc mis en œuvre afin d'accroître l'intégrité des structures aéronautiques lors de situations catastrophiques ; l'objectif étant d'améliorer la survivabilité des passagers. Le nombre de décès liés aux déplacements par les airs est l'un des plus bas, par rapport au nombre de passagers et de kilomètres parcourus. Par exemple, pour l'Union Européenne, les déplacements par aviation civile sont les plus sûrs, à égalité avec le train (Tableau 1). Néanmoins, chaque accident aérien reste traumatisant pour l'opinion publique en raison du très grand nombre de pertes humaines dénombrées pour un seul évènement et de l'impact médiatique associé, ce qui incite à poursuivre les recherches.

Tableau 1 – Données d'accidentologie pour l'Union Européenne sur la période 2001-2002 (European Transport Safety Council).

Moyen de transport	Passagers tués par 100 millions de passagers-kilomètres
Cyclomoteur	13.8
Déplacement pédestre	6.4
Bicyclette	5.4
Voiture	0.7
Ferry	0.25
Autobus et autocar	0.07
Air (aviation civile)	0.035
Train	0.035

Un exemple illustre parfaitement les progrès réalisés ces dernières années concernant l'amélioration de l'intégrité des structures aéronautiques. Il s'agit de l'amerrissage d'urgence d'un Airbus A320 qui a eu lieu le 15 janvier 2009 sur le vol 1549 de la compagnie américaine US Airways. Le pilote de l'appareil réussit à amerrir sur l'Hudson, à New York aux États-Unis, et permet ainsi l'évacuation des 155 passagers et des membres de l'équipage, tous sains et saufs (Figure 1). Il semble que l'avion soit entré en collision avec des oiseaux, peu après son décollage. L'endommagement des réacteurs a alors obligé le

pilote à rebrousser chemin et à tenter cette manœuvre périlleuse. En effet, aucun avion de cette taille n'avait jamais réussi à amerrir auparavant. En plus de l'habileté du pilote, cette opération n'aurait pu réussir sans la résistance remarquable de la structure face aux sollicitations extrêmes subies lors de l'impact avec le fleuve. Ce scénario est, en fait, très représentatif des objectifs que la recherche vise à atteindre en termes de tenue structurale des aéronefs. Dans le cas d'un amerrissage, les objectifs sont d'éviter la rupture de la structure pour limiter les entrées d'eau dans l'appareil, et ainsi augmenter sa flottabilité pour permettre l'évacuation de tous les passagers.



FIGURE 1 – Évacuation des passagers de l'A320 sur l'Hudson.

En revanche, lorsque la structure aéronautique est endommagée, les conséquences peuvent être spectaculaires, voire dramatiques. À titre d'illustration, intéressons-nous à l'accident qui a eu lieu le 28 avril 1988 sur le vol 243 du Boeing 737 de la compagnie Aloha Airlines, qui relie Hilo à Honolulu à Hawaï (États-Unis). Une déchirure sur une petite section du plafond le long d'une rangée de rivets a entraîné une décompression explosive en vol. Une large partie du fuselage supérieur (sur environ 35 m² de superficie), allant de la porte du cockpit jusqu'à l'emplanture des ailes, est alors complètement arrachée (Figure 2). L'origine de la première déchirure, entraînant la déchirure du toit par la suite, est due au défaut d'un adhésif époxy ; ce dernier ayant pour fonction d'empêcher l'air et l'eau d'entrer en contact. Or, cet appareil, qui compte près de 90 000 cycles de vol en 19 années de service, est exclusivement exploité pour des vols courts et répétitifs dans une atmosphère maritime chargée en sel et en humidité. Un lent processus de corrosion s'est alors mis en place jusqu'à ce que le volume des métaux corrodés soit suffisamment important pour provoquer des concentrations de contraintes importantes au voisinage des assemblages rivetés jusqu'à la rupture. Cet accident très spectaculaire a cependant fait peu de victimes, seule une personne membre de l'équipage a été aspirée au moment de la dépressurisation.

Ce second exemple met en évidence le rôle prépondérant des assemblages rivetés dans la tenue des structures aéronautiques. Plus généralement, l'expérience montre que, quel



FIGURE 2 – Accident du Boeing 737 du vol 243 d’Aloha Airlines.

que soit le chargement appliqué à la structure, de fortes concentrations de contraintes peuvent avoir lieu dans les zones d’assemblages rivetés. Ce phénomène de localisation des contraintes dans l’assemblage peut, non seulement, être à l’origine de la rupture de la fixation, mais peut aussi provoquer la rupture de la tôle au voisinage du rivet. La rupture, ainsi initiée au bord d’une perforation (procédé de rivetage), peut alors se propager très rapidement puisqu’elle suit de manière générale une direction privilégiée : le long des lignes de rivets, en passant d’un assemblage à l’autre (Figure 3). À terme, ceci peut mener à la perte catastrophique de l’appareil par dislocation de parties structurales.

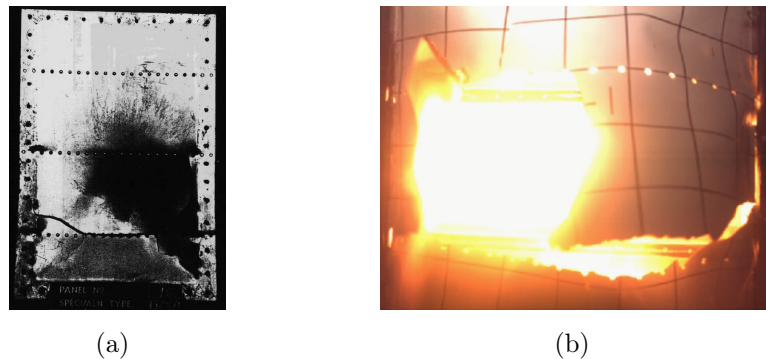


FIGURE 3 – Propagation de fissures (a) Dans une plaque métallique rivetée après un impact oiseau [1], (b) Dans une plaque multi-perforée soumise à un chargement d’explosion [2].

Afin d’analyser l’influence des assemblages rivetés sur le comportement mécanique des structures aéronautiques, et en particulier sur l’initiation et la propagation des ruptures, deux approches peuvent être envisagées : l’élaboration d’essais expérimentaux ou l’analyse par simulations numériques. Au niveau expérimental, il est difficile d’évaluer le comportement d’une structure aéronautique complète pour des raisons de coût et de sécurité (e.g., lorsque la structure est soumise à un chargement de type explosion). À ce jour, seuls deux

crash-tests d’avion de ligne ont été réalisés¹, et malgré tous les moyens scientifiques et financiers mis en œuvre et de fortes instrumentations de mesure, il n’est pas toujours possible de tout analyser et de tout contrôler. Les campagnes expérimentales restreintes à des sous-structures aéronautiques sont plus répandues, mais restent insuffisantes pour mettre en évidence la tenue de l’appareil, puisqu’il est alors impossible d’analyser la propagation de la rupture dans la structure complète. Par conséquent, il est nécessaire d’avoir recours à la simulation numérique.

Les phénomènes locaux qui ont lieu à l’échelle de l’assemblage (i.e., tels que des concentrations de contraintes (Figure 4(a)) ou des modes de déformation et de rupture spécifiques à l’assemblage (Figure 4(b))) influencent le comportement global de la structure. Par conséquent, les assemblages rivetés doivent être pris en compte dans la modélisation de la structure aéronautique complète. Une modélisation fine des zones d’assemblages se-

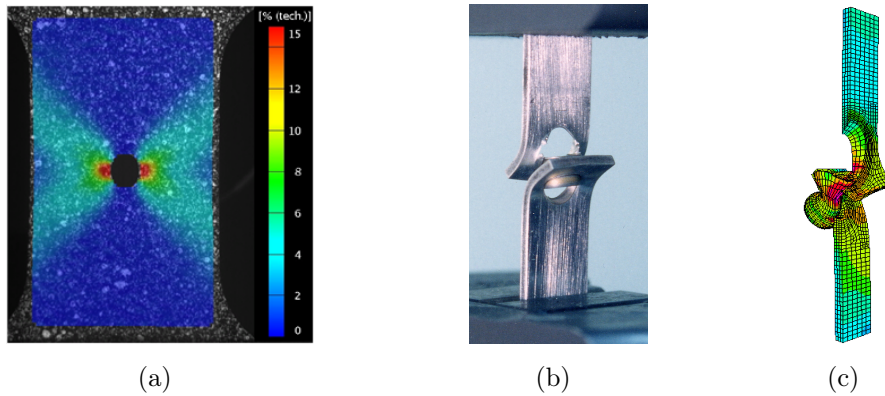


FIGURE 4 – (a) Localisation des contraintes observée sur une éprouvette perforée, (b) Mode de déformation d’un assemblage riveté, (c) Modélisation fine d’un assemblage riveté.

rait nécessaire pour localiser les contraintes et prédire l’initiation d’une rupture en bord de perforation (Figure 4(c)). Dans le même temps, il est impératif de mailler la structure complète de l’avion pour être capable de simuler la propagation de la rupture (Figure 5). Or, une structure complète comporte plusieurs centaines de milliers d’assemblages rivetés. Une modélisation fine de l’assemblage n’est donc pas envisageable pour traiter ce problème multi-échelles étant données les technologies logicielles et matérielles actuelles.

Dans les calculs de structures, un assemblage riveté est généralement modélisé au moyen

1. Le premier crash-test d’un avion de ligne a été réalisé par la NASA en 1984 sur un Boeing 720 et avait pour but de tester un nouveau carburant censé être moins réactif au feu. Le second crash-test aéronautique a eu lieu en 2012, dans un désert du Mexique, sur un Boeing 727 ; l’objectif ici était de réaliser un documentaire sur la sécurité aérienne et les gestes que les passagers doivent adopter pour augmenter leurs chances de survie en cas de crash.

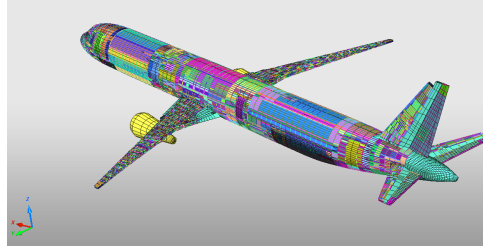


FIGURE 5 – Modèle d’avion complet (A321).

d’un modèle de « connecteur ». Ce modèle est un élément fini 1D, de type poutre [3] ou ressort [4], dans lequel les comportements mécaniques linéaire et non-linéaire du rivet ainsi que sa rupture sont implémentés². L’assemblage est alors représenté par un connecteur relié à deux éléments finis de coque par des relations cinématiques (interface liante). Le modèle de connecteur non-linéaire développé dans la référence [4] est comparé à différentes stratégies de modélisation sur une sous-structure aéronautique comportant environ 700 rivets (partie basse du fuselage arrière d’un Airbus A320). La réponse de la structure calculée avec le modèle de connecteur non-linéaire est celle qui se rapproche le plus de la réponse expérimentale. Une surestimation importante de la rigidité de la structure est, par contre, observée lorsqu’un modèle de connecteur linéaire ou des liens rigides sont utilisés pour la modélisation des assemblages ; ce dernier modèle n’étant d’ailleurs pas du tout représentatif. Une différence notable est tout de même observée entre les résultats obtenus avec le modèle de connecteur avancé et l’expérimental. Cet écart est dû au fait que la fragilisation structurale causée par les trous dans les tôles n’est pas introduite dans les éléments finis de coque standards auxquels les macro-éléments rivet sont connectés.

Une première solution envisagée, par le laboratoire commun du DRSC³, pour prendre en compte la présence des perforations dans les calculs de structures, a été de *calibrer* le modèle de fixation en y introduisant les déformations locales de la tôle au voisinage du rivet [6–8]⁴. Ce processus de calibration n’est, malgré tout, pas approprié car, à chaque

2. Les comportements linéaire et non-linéaire du rivet sont introduits dans le modèle de connecteur *via* une courbe tabulée de type force/déplacement, ou un modèle élasto-plastique. Le modèle de comportement du rivet est caractérisé directement par des essais normalisés de type Arcan en statique et en dynamique [5]. Concernant la rupture de la fixation, elle est introduite dans le modèle *via* un critère de rupture ou un modèle d’endommagement.

3. Le laboratoire commun DRSC (Dynamique Rapide des Structures et Collision) associe le département DADS (Département Aéroélasticité et Dynamique des Structures) de l’Onera (Office National d’Études et de Recherches Aérospatiales), l’UVHC-LAMIH (Laboratoire d’Automatique, de Mécanique et d’Informatique industrielles et Humaines de l’Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis) et le CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique).

4. L’interaction rivet/plaque perforée a, pour cela, été caractérisée, soit au moyen d’essais d’interaction de type Arcan, soit par une approche numérique dite de Plans d’Expériences Numériques.

changement de paramètre dans l'assemblage⁵, l'ensemble de la procédure doit être systématiquement réitérée, qu'elle soit expérimentale ou numérique. De plus, même en procédant de cette manière, certains modes de rupture ne peuvent toujours pas être modélisés, notamment le passage au travers de la fixation.

La deuxième solution envisagée à l'Onera depuis quelques années consiste à dissocier le modèle de fixation de la plaque perforée de façon à prendre en compte le comportement mécanique de la plaque perforée. Un super-élément de plaque perforée de type hybride-Trefftz à 8 nœuds a donc été développé en ce sens dans une précédente thèse [9]. Il permet de prendre en compte l'influence de la perforation dans le calcul des champs de contraintes et de déplacements avec précision, et avec peu de degrés de liberté [10]. Cependant, la frontière interne du super-élément, qui correspond à la perforation, est formulée de manière analytique. De ce fait, le super-élément ne peut pas subir de chargements complexes. L'interaction avec un modèle de connecteur de type rivet ne peut donc pas être gérée, rendant impossible la modélisation de l'assemblage.

En résumé, l'ensemble des travaux⁶ ont mis en évidence l'importance de la prise en compte des perforations dans la modélisation des assemblages dans les calculs de structures. Les développements les plus récents et les plus prometteurs, pour répondre à cette problématique, concernent la formulation d'un super-élément de plaque perforée, complètement dissocié du modèle de fixation. Cependant, l'interaction entre ces deux modèles est impossible.

Les travaux de recherche proposés dans ce manuscrit s'inscrivent donc dans une démarche qui consiste à améliorer la modélisation des assemblages rivetés dans les calculs de structures aéronautiques. Cette étude consiste à développer un élément fini adapté aux calculs de structures qui soit (i) capable de tenir compte de l'influence de la perforation sur les champs mécaniques, d'une part, et qui soit (ii) formulé de façon à rendre possible l'interaction avec un macro-élément rivet, d'autre part. Ces travaux ont fait l'objet de trois publications dans des revues internationales, ainsi que trois communications nationales, et une communication internationale. La liste des publications est présentée en Annexe A.

La démarche proposée dans ce manuscrit s'articule autour de quatre chapitres. Dans un premier temps, le cadre des recherches dans lequel s'inscrit la formulation de super-

5. Le nombre de paramètres pouvant varier dans un assemblage riveté est très important. Par exemple, le rayon de la perforation, le diamètre du fût du rivet, le type de rivet, le matériau constituant le rivet, le matériau constituant les tôles (e.g., assemblage d'une tôle métallique et d'une tôle composite), épaisseur des tôles, etc.

6. Un historique des travaux de recherches réalisés à l'Onera sur la modélisation des assemblages rivetés en calculs de structures est dressé en Annexe B.

éléments est présenté. Certains concepts nécessaires à la compréhension des fondements théoriques des super-éléments, comme les méthodes de décomposition de domaine ou la notion de principes variationnels, sont présentés. Une synthèse bibliographique sur des super-éléments comportant un défaut est ensuite réalisée. Enfin, la formulation de deux super-éléments de la littérature, sur laquelle nos développements seront basés, est présentée en détail. Dans un deuxième temps, la démarche a consisté à formuler un super-élément perforé qui comporte des nœuds sur la perforation afin de pouvoir établir une interaction entre la fixation et la perforation *via* ces nouveaux nœuds. Pour cela, le principe variationnel associé au nouveau super-élément est formulé, et les fonctions d'interpolation sont choisies de façon à formuler un super-élément qui comporte 8 nœuds externes et 8 nœuds sur la perforation. Un formalisme permettant d'appliquer des chargements sur la perforation, est également proposé. Enfin, la matrice de rigidité et le vecteur chargement du nouveau super-élément perforé sont établis. Ces développements font l'objet du Chapitre 2. Dans le Chapitre 3, les fonctions d'interpolation du nouveau super-élément sont étudiées. L'ajout de nœuds supplémentaires situés sur la perforation implique une augmentation de l'ordre des fonctions d'interpolation, leur capacité à reconstruire les champs de contraintes et de déplacements est alors évaluée. L'implémentation du nouveau super-élément dans le code de calculs éléments finis ZéBuLoN, ainsi que sa validation, sont finalement proposées dans le Chapitre 4. En premier lieu, l'algorithme, les outils développés, et l'intégration du nouveau super-élément dans l'architecture du code ZéBuLoN y sont présentés. La reconstruction des champs de contraintes et de déplacements au voisinage de la perforation est ensuite évaluée. Finalement, la validation du super-élément, qui consiste à vérifier que les champs de contraintes et de déplacements sont calculés avec précision, est réalisée en deux étapes. Tout d'abord, seuls des chargements externes sont considérés (aucun chargement n'est appliqué à la perforation). Ensuite, seul le contour de la perforation subit un chargement (pas de chargement externe).

Chapitre 1

Synthèse bibliographique

Une synthèse bibliographique sur les techniques de modélisation des discontinuités est proposée dans ce chapitre. Dans un premier temps, les méthodes numériques usuelles pour la représentation d'une discontinuité dans un milieu sont présentées. Les avantages et inconvénients de chacune de ces méthodes par rapport à la problématique de la modélisation des assemblages rivetés en calculs de structures, et en particulier la prise en compte des perforations, sont exposés. Dans un deuxième temps, l'analyse bibliographique se focalise sur la notion de super-éléments. Les différents concepts nécessaires à la compréhension des fondements théoriques de ces éléments particuliers, comme les méthodes de décomposition de domaine et la notion de principes variationnels, sont présentés. Un état de l'art des super-éléments existants dans la littérature pour la modélisation de discontinuités géométriques et matérielles est, ensuite, réalisé. Deux super-éléments intégrant la présence d'une perforation se distinguent pour répondre à notre problématique, en termes de capacité à localiser les champs mécaniques au voisinage de la perforation, d'adaptation aux calculs de structures (temps de calcul), et de capacité à représenter l'assemblage riveté (interaction entre le rivet et la perforation). Finalement, la formulation de ces deux super-éléments qui comportent une perforation, sur lesquels sont fondés les développements présentés dans les chapitres suivants, est détaillée.

Table des matières

1.1	Méthodes numériques pour la représentation des discontinuités	10
1.2	Méthodes de décomposition de domaine	18
1.3	Formulation d'éléments finis à partir de principes variationnels	27
1.4	Super-éléments finis pour la modélisation des discontinuités .	31
1.5	Présentation d'un super-élément hybride-Trefftz déplacement comportant un trou	40
1.6	Présentation d'un super-élément semi-analytique comportant un trou	51
1.7	Synthèse	53

1.1 Méthodes numériques pour la représentation des discontinuités

1.1.1 Méthode des Éléments Finis

La Méthode des Éléments Finis (FEM) peut être considérée comme étant issue de la méthode de Ritz. Cette dernière s'intéresse à la résolution de problèmes mathématiques ou physiques définis dans un domaine continu Ω par des équations aux dérivées partielles (Équations (1.1.1)-(1.1.2)). Elle consiste à remplacer la résolution du problème continu en la résolution d'un problème discrétisé de dimension finie afin de pouvoir le résoudre numériquement [11]. Considérons que le problème à résoudre s'écrit sous sa forme la plus générale (Équations (1.1.1)-(1.1.2)). L'objectif est de trouver la fonction \mathbf{u} qui satisfait, à la fois, un ensemble d'équations aux dérivées partielles dans le domaine Ω décrites par l'Équation (1.1.1) et un ensemble de conditions aux limites sur la frontière Γ du domaine Ω décrites par l'Équation (1.1.2) (Figure 1.1).

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (1.1.1)$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.1.2)$$

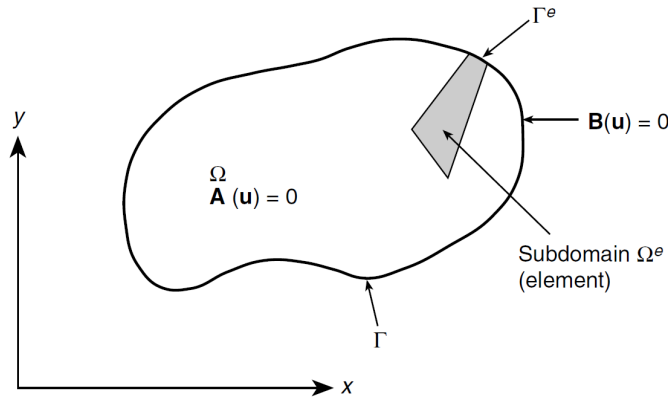


FIGURE 1.1 – Domaine Ω et sa frontière Γ associé au problème à résoudre [11].

La méthode de Ritz repose sur la formulation d'un principe variationnel pour résoudre le système d'Équations (1.1.1)-(1.1.2) et sur l'écriture de la fonction inconnue recherchée \mathbf{u} comme une combinaison linéaire de n_m modes de déplacement, notés $\phi_i(\mathbf{x})$ pour $i = 1, \dots, n_m$, chacun étant défini sur le domaine entier [12].

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_m} a_i \phi_i(\mathbf{x}) \quad (1.1.3)$$

En introduisant cette approximation dans le principe variationnel formulé, il en résulte un

système linéaire à résoudre où les inconnues à déterminer sont les coefficients a_i (Équation (1.1.4)).

$$K_{ij}a_j = f_i \quad (1.1.4)$$

Un des inconvénients de la méthode de Ritz réside dans le choix des fonctions ϕ_i . De plus, le caractère global de cette approche (au sens où les fonctions ϕ_i sont définies sur le domaine complet) mène à un système plein, ce qui présente un inconvénient d'un point de vue numérique.

La Méthode des Éléments Finis est, quant à elle, une approche localisée. Le domaine continu Ω est approché par un domaine Ω_h qui est constitué de sous-domaines de forme géométrique simple Ω_e pour $e = 1, \dots, n_e$, appelés « éléments finis » : $\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e$. L'ensemble des éléments, i.e. le domaine Ω_h , forme le maillage. L'intersection entre deux éléments quelconques du maillage est soit vide, soit réduite à un point, ou à un côté tout entier.

Dans chacun des éléments du maillage, le champ inconnu est généralement approximé à l'aide de fonctions polynomiales appelées fonctions d'interpolation, dont les coefficients, appelés degrés de liberté, sont les inconnues (Équation (1.1.5)) [12].

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\Omega_e} = \sum_{i \in N_n} \sum_{\alpha} u_i^{\alpha} \phi_i^{\alpha}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \quad (1.1.5)$$

où N_n représente l'ensemble des nœuds de l'élément Ω_e , u_i^{α} est le déplacement du nœud n° i dans la direction α ($\alpha = x$ ou y), et ϕ_i^{α} est la fonction d'interpolation correspondante telle que $\phi_i^{\alpha}(\mathbf{x}) = \phi_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_{\alpha}$, pour $\alpha = x$ ou y . Notons que l'Équation (1.1.5) peut aussi être écrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\Omega_e} = \sum_{i \in N_n} \mathbf{u}_i \phi_i(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e, \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_i = u_i^x \mathbf{e}_x + u_i^y \mathbf{e}_y \quad (1.1.6)$$

Une représentation globale du champ des déplacements peut également être obtenue par l'Équation (1.1.7). En pratique, cette représentation n'est pas explicitement utilisée car le raisonnement de la Méthode des Éléments Finis est essentiellement basé sur un traitement élément par élément et sur la notion d'assemblage.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i N_i(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h \quad (1.1.7)$$

où I est l'ensemble des nœuds du maillage Ω_h , et $N_i(\mathbf{x})$ est la fonction d'interpolation globale associée au nœud n° i . Le support de la fonction $N_i(\mathbf{x})$, noté Ω_i , est constitué de l'ensemble des éléments qui sont connectés au nœud n° i , autrement dit $N_i(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \notin \Omega_i$. De plus, si $\mathbf{x} \in \Omega_e \subset \Omega_i$, alors $N_i(\mathbf{x}) = \phi_k(\mathbf{x})$ où k est le numéro local (i.e., relatif à l'élément Ω_e) du nœud qui correspond au numéro global i [13].

Comme précédemment, il résulte de l'association d'un principe variationnel et de l'Équation (1.1.5) un système matriciel du type de l'Équation (1.1.4), valable sur l'élément considéré. Le comportement du système global est finalement obtenu par assemblage des matrices et des vecteurs forces élémentaires, i.e. par la sommation des contributions de tous les éléments [12]. Contrairement à la méthode de Ritz, la FEM conduit à un système linéaire creux, ce qui est un des points forts de cet outil numérique.

1.1.2 Méthode des Éléments Finis étendue

La Méthode des Éléments Finis étendue, ou *eXtended Finite Element Method* (X-FEM), repose sur la méthode de la Partition de l'Unité (PU) développée par Melenk et Babuska [14]. Ils ont montré que la base des fonctions d'interpolation de la FEM pouvait être enrichie afin de représenter une fonction donnée, par exemple $F(\mathbf{x})\mathbf{e}_x$, sur un sous-domaine donné $\Omega_f \subset \Omega$ (Équation (1.1.8)). En effet, en réécrivant le champ de déplacements sur le domaine entier, i.e. $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N_n(\mathbf{x})} \sum_{\alpha} u_i^{\alpha} \phi_i^{\alpha}(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega_h$ où $N_n(\mathbf{x})$ est l'ensemble des nœuds de l'élément qui contient le point \mathbf{x} , l'approximation EF peut être vue comme un cas particulier de l'approximation par une méthode sans maillage¹. Ainsi, l'approximation EF classique peut être enrichie en utilisant les mêmes techniques que celles utilisées dans les méthodes sans maillage. L'approximation de \mathbf{u} par la Partition de l'Unité peut alors s'écrire sous la forme de l'Équation (1.1.8).

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N_n(\mathbf{x})} \sum_{\alpha} u_i^{\alpha} \phi_i^{\alpha}(\mathbf{x}) + \sum_{i \in N_n(\mathbf{x}) \cap N_f} \sum_{\alpha} b_i^{\alpha} \phi_i^{\alpha}(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h \quad (1.1.8)$$

où N_f est l'ensemble des nœuds dont le support appartient au domaine Ω_f , et les coefficients b_i^{α} sont les nouveaux degrés de liberté.

La méthode X-FEM a été initialement développée pour modéliser une fissure avec un maillage EF classique sans avoir besoin de la mailler explicitement (Figure 1.2(a)) [15]. Cette méthode est, en fait, un cas particulier de la méthode PU puisqu'elle consiste à enrichir l'approximation EF (Équation (1.1.7)) avec des fonctions discontinues qui permettent de modéliser la discontinuité introduite par la présence de la fissure. L'approximation de

1. Les méthodes sans maillage, ou *Meshless Methods*, sont apparues au début des années 90. Elles consistent à discrétiser le domaine d'étude en un ensemble de points, et non en un ensemble d'éléments constituant un maillage comme la FEM. Chaque point possède un domaine d'influence, généralement un cercle, sur lequel les fonctions d'interpolation sont construites (le support de la fonction d'interpolation associée au point i correspond au domaine d'influence du point i , i.e. elle est nulle en dehors du domaine d'influence). À cet ensemble de fonctions d'interpolation, d'autres fonctions peuvent être ajoutées par enrichissement pour permettre, par exemple, la représentation d'un mode de déplacement donné dans un sous-domaine donné [12]. Le concept d'enrichissement est né.

la donnée \mathbf{u} par la méthode X-FEM pour la modélisation d'une fissure complète dans un maillage est décrite par l'Équation (1.1.9).

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i N_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in L} \mathbf{a}_i N_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) + \sum_{i \in K_1} N_i(\mathbf{x}) \left[\sum_{l=1}^4 \mathbf{b}_{i,1}^l F_1^l(\mathbf{x}) \right] \\ & + \sum_{i \in K_2} N_i(\mathbf{x}) \left[\sum_{l=1}^4 \mathbf{b}_{i,2}^l F_2^l(\mathbf{x}) \right] \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

où I est l'ensemble des nœuds du maillage, \mathbf{u}_i est le degré de liberté vectoriel classique au nœud n° i , et N_i est la fonction de forme associée au nœud n° i (Équation (1.1.7)). L'ensemble $L \subset I$ est l'ensemble des nœuds enrichis pour modéliser la fissure coupant de part en part un élément (cf. nœuds symbolisés par \circ dans la Figure 1.2(a)), les coefficients \mathbf{a}_i sont les degrés de liberté vectoriels enrichis associés, et la fonction H est une fonction d'enrichissement de type Heaviside qui est discontinue dans le plan de la fissure et qui vaut $+1$ d'un côté de la fissure et -1 de l'autre. Les ensembles $K_1 \subset I$ et $K_2 \subset I$ représentent l'ensemble des nœuds enrichis pour modéliser les deux fonds de fissure (cf. nœuds symbolisés par \square dans la Figure 1.2(a)), et les coefficients $\mathbf{b}_{i,1}^l$ et $\mathbf{b}_{i,2}^l$ sont les degrés de liberté vectoriels correspondant, et les fonctions F_1^l et F_2^l sont les fonctions d'enrichissement capables de capturer la singularité du champ de déplacements en pointe de fissure.

La description géométrique des discontinuités est effectuée grâce à la technique des « level-sets ». Cette méthode consiste à représenter une interface comme étant l'iso-zéro d'une fonction de niveau, appelée level-set. Cette fonction est généralement définie comme la distance signée d'un nœud du maillage à l'interface considérée. Dans le cas de la fissure, deux fonctions level-sets sont définies : la première donne la distance signée à la fissure et permet de déterminer la valeur de la fonction H (level-set notée Ψ dans la Figure 1.2(b)), et la seconde donne la distance signée à la pointe de fissure (level-set notée ϕ dans la Figure 1.2(b)).

1.1.3 Méthodes multi-échelles

Le concept de la modélisation multi-échelles a été initialement développé pour l'étude des matériaux hétérogènes. Le comportement des matériaux à l'échelle d'une structure est, en effet, fortement dépendant des phénomènes physiques qui ont lieu à l'échelle des hétérogénéités, i.e. de la microstructure des matériaux. Le principe des méthodes multi-échelles consiste donc à prendre en compte ces phénomènes locaux à l'échelle macroscopique.

Par exemple, la méthode *Transformation Field Analysis* (TFA) développée par Dvorak *et al.* [16–19] est une méthode multi-échelles qui permet de construire une loi de comportement macroscopique du milieu hétérogène étudié. Ce dernier pourra alors être substitué

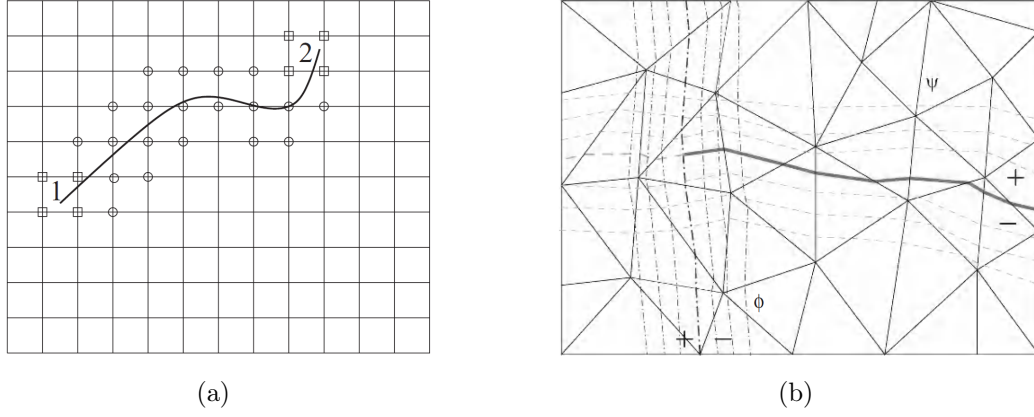


FIGURE 1.2 – (a) Représentation d’une fissure dans un maillage uniforme avec X-FEM. Les nœuds enrichis pour la modélisation de la discontinuité sont symbolisés par \circ , et les nœuds enrichis pour la modélisation des fonds de fissure sont symbolisés par \square , (b) Représentation des level-sets Ψ et ϕ [12].

par un milieu macroscopique homogène « équivalent ». Les méthodes multi-échelles reposent, tout d’abord, sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER), noté V . Celui-ci est décomposé en n sous-volumes V_r à l’intérieur desquels les champs sont supposés uniformes. Une fois le VER défini, les relations permettant de relier les grandeurs des différentes échelles doivent être définies. La méthode TFA permet de déterminer ces champs locaux en fonction des données macroscopiques grâce aux relations de *localisation* (Équation (1.1.10)). Le champ de l’échelle macroscopique est obtenu à partir des valeurs locales grâce à la relation d’*homogénéisation* (Équation (1.1.11)). Ces relations sont résumées dans la Figure 1.3, pour un schéma en déformation.

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_r &= \bar{\bar{A}}_r : \bar{E} + \sum_{s=1}^n \bar{\bar{D}}_{rs} : (\bar{\varepsilon}_s^p + \bar{\varepsilon}_s^{th}) \\ \bar{\sigma}_r &= \bar{\bar{B}}_r : \bar{\Sigma} - \sum_{s=1}^n \bar{\bar{F}}_{rs} : (\bar{\varepsilon}_s^p + \bar{\varepsilon}_s^{th})\end{aligned}\tag{1.1.10}$$

où les tenseurs $\bar{\varepsilon}_r$ et $\bar{\sigma}_r$ désignent les moyennes volumiques de la déformation et de la contrainte microscopiques dans le sous-volume V_r , les tenseurs $\bar{\bar{A}}_r$ et $\bar{\bar{B}}_r$ sont les moyennes volumiques des tenseurs élastiques de localisation respectivement en déformation et en contrainte dans le sous-volume V_r , \bar{E} et $\bar{\Sigma}$ sont respectivement la déformation et la contrainte macroscopiques appliquées au VER, et les tenseurs $\bar{\bar{D}}_{rs}$ et $\bar{\bar{F}}_{rs}$ sont des tenseurs d’ordre 4 appelés tenseurs d’influence. $\bar{\bar{D}}_{rs}$ (respectivement $\bar{\bar{F}}_{rs}$) représente l’influence d’une déformation (respectivement d’une contrainte) d’origine anélastique (plastique ou thermique) dans le sous-volume V_s sur le champ des déformations (respectivement des contraintes) du sous-volume V_r .

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \langle \bar{\varepsilon}(x) \rangle_V = \sum_{r=1}^n c_r \bar{\varepsilon}_r \\ \bar{\Sigma} &= \langle \bar{\sigma}(x) \rangle_V = \sum_{r=1}^n c_r \bar{\sigma}_r\end{aligned}\tag{1.1.11}$$

où $\langle x \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V x \, dx$ est la moyenne de x sur V , et $c_r = V_r/V$ est la fraction volumique du sous-volume V_r dans le VER.

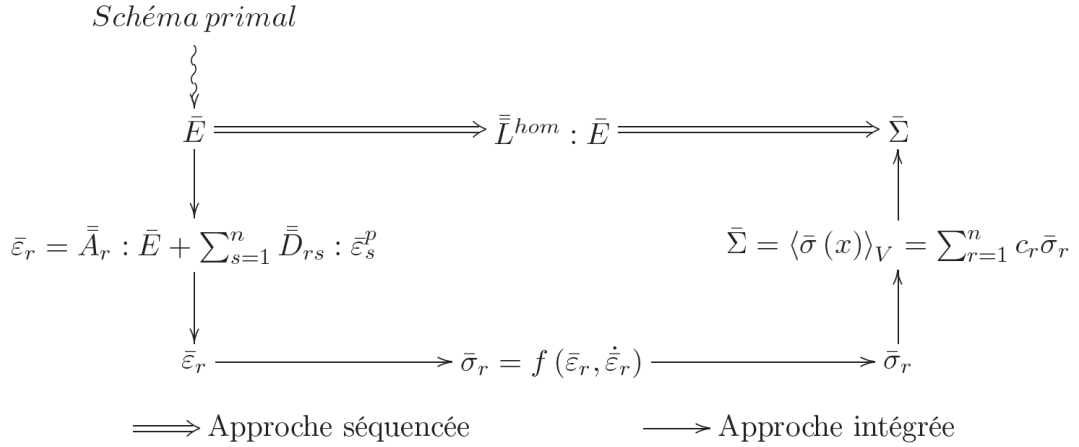


FIGURE 1.3 – Principe de l’homogénéisation [20].

Deux approches peuvent être distinguées (Figure 1.3) : l’approche *séquentielle*, qui permet de construire une loi de comportement homogène équivalente (LHE) tenant compte de données microscopiques ; et l’approche *intégrée*, qui repose sur la résolution des lois constitutives à l’échelle des hétérogénéités et qui consiste en un dialogue permanent entre les différentes échelles pour relocaliser les contraintes et les déformations.

1.1.4 Synthèse

La problématique posée dans ce travail de recherche concerne l’amélioration de la modélisation des assemblages rivetés dans les calculs de structures aéronautiques, et en particulier la prise en compte des perforations. Pour répondre à cette problématique, la méthodologie qui sera adoptée devra, en particulier, être capable de prendre en compte l’influence des perforations sur le comportement mécanique de l’ensemble de la structure. Les critères essentiels que la méthode devra respecter sont : la capacité à localiser les champs mécaniques au voisinage de la perforation ; l’adaptation aux calculs de structures ; et la capacité à représenter l’assemblage riveté. La méthodologie recherchée devra être formulée de façon à ce que la prise en compte des perforations soit précise mais pas

au détriment du coût de calcul et que la modélisation de l'interaction entre la perforation et un macro-élément rivet soit possible. Les méthodes numériques présentées peuvent être appliquées au cas de la modélisation d'une perforation. L'objectif de cette partie est donc d'évaluer la pertinence de ces méthodes par rapport à la problématique posée.

La Méthode des Éléments Finis est particulièrement adaptée pour localiser les champs au voisinage de la perforation. Par contre, ce résultat ne peut être obtenu que si le maillage est suffisamment raffiné au voisinage du trou, ce qui est mal adapté pour une application aux calculs de structures, telle que celles présentées en introduction.

Les discontinuités telles que les trous ou les inclusions peuvent être modélisées avec la méthode X-FEM [21]. L'approximation du champ des déplacements lorsque la discontinuité considérée est une perforation s'exprime de manière plus simple que dans le cas d'une fissure (Équation (1.1.9)).

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i N_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in L} \mathbf{a}_i N_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \quad (1.1.12)$$

où l'ensemble L correspond à l'ensemble des nœuds dont le support de la fonction d'interpolation associée intersecte la frontière du trou (cf. nœuds symbolisés par \circ dans la Figure 1.4(a)). Notons que lorsque le support d'un nœud est complètement à l'intérieur du trou (cf. nœuds symbolisés par \diamond dans la Figure 1.4(a)), les degrés de liberté associés sont soit fixés à zéro soit éliminés du système final.

Une seule level-set est nécessaire pour décrire la géométrie de la perforation. Elle permet de déterminer si le nœud considéré se situe à l'extérieur de la perforation (dans ce cas, $H(\mathbf{x})$ vaut 1), ou s'il se situe à l'intérieur (dans ce cas, $H(\mathbf{x})$ vaut 0) (Figure 1.4(b)). L'avantage majeur de cette méthode est que le maillage ne se conforme pas à la géométrie de la discontinuité et permet ainsi de s'affranchir de cette contrainte inhérente à la FEM (Figure 1.4(a)). Par contre, l'inconvénient est que l'interaction avec un macro-élément rivet n'est pas forcément intuitive puisque l'application d'un chargement à la perforation semble difficile, et qu'il est malgré tout nécessaire de raffiner le maillage dans la zone perforée.

Une méthode multi-échelles peut être appliquée pour prendre en compte les perforations à l'échelle de la structure. En effet, Bayart [22] a mis en œuvre ce type d'approche pour la modélisation des tôles perforées dans les calculs de structures ; l'échelle macroscopique fait alors référence à la structure étudiée et l'échelle locale est relative à la perforation.

La démarche multi-échelles, adoptée par Bayart [22], est basée sur le schéma d'homogénéisation intégrée de la méthode TFA. Elle permet de capturer, à un niveau macroscopique,

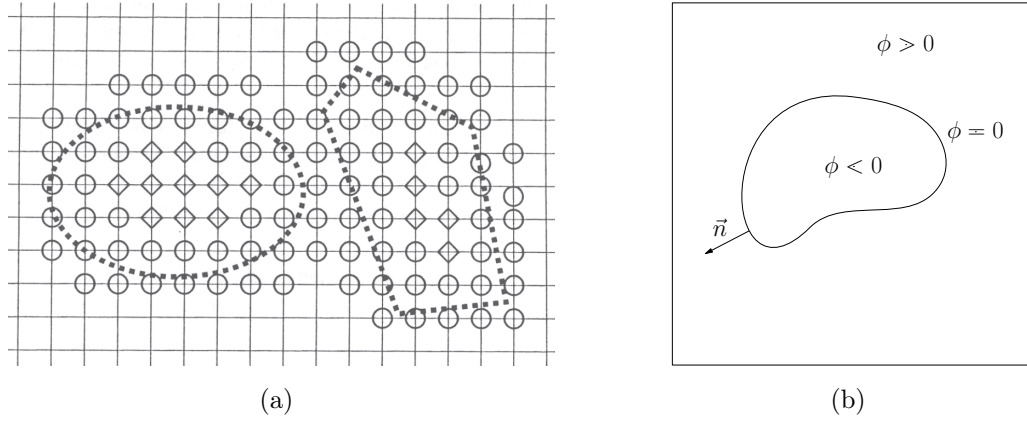


FIGURE 1.4 – (a) Représentation d’une perforation dans un maillage uniforme avec X-FEM. Les nœuds enrichis pour la modélisation de la discontinuité sont symbolisés par ◦, et les nœuds éliminés sont symbolisés par ◊, (b) Représentation de la level-set ϕ dans le cas d’un trou [12].

la distribution des champs de déformations et de contraintes induite par la présence d’une perforation dans une plaque. Le VER considéré, dans ce contexte, s’apparente à une plaque perforée en son centre (Figure 1.5).

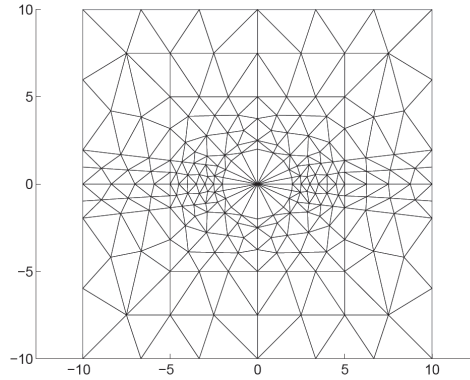


FIGURE 1.5 – Volume Élémentaire Représentatif [20].

La méthode multi-échelles présentée ici, dans le cadre de la modélisation des tôles perforées en calcul de structures, a cependant des limites. Tout d’abord, la précision de la méthode TFA est liée au nombre de sous-volumes qui découpent le VER, ce qui engendre des coûts de calcul importants en particulier pour des comportements non-linéaires locaux. Ensuite, si l’utilisation d’une loi macroscopique homogénéisée est efficace lorsqu’on s’intéresse au comportement linéaire et non-linéaire du milieu perforé homogénéisé, elle est cependant inadaptée lorsqu’on s’intéresse à la rupture du milieu.

Finalement, aucune des méthodes présentées ne répond complètement à la problématique posée. Le bilan dressé par Leconte [9] reste encore valable aujourd’hui (Tableau 1.1).

On remarquera, cependant, que l’item « Capacité à représenter l’assemblage riveté » du Tableau 1.1 a été précisé ici, puisqu’il intègre la capacité à représenter l’interaction entre le modèle adopté pour la plaque perforée et celui du rivet, ce qui n’était pas abordé dans les travaux précédents.

En conclusion, il est donc choisi de poursuivre vers une modélisation de la tôle perforée par super-éléments finis. Par conséquent, l’étude bibliographique réalisée dans ce chapitre se focalise maintenant sur différentes notions qui seront utilisées pour poser le cadre théorique des développements réalisés dans ces travaux.

1.2 Méthodes de décomposition de domaine

Un état de l’art des méthodes de décomposition de domaine, basé sur les références [9, 11, 23], est présenté dans cette section. Les méthodes de décomposition de domaine s’intéressent à la connexion de plusieurs sous-domaines dont les modélisations, les approximations, ou encore les méthodes de résolution appliquées peuvent être différentes. Ces méthodes sont particulièrement adaptées aux approches multi-échelles, et aux techniques de calcul parallèle. Les méthodes de décomposition de domaine trouvent aussi des applications pour la construction de super-éléments finis. Ces notions seront donc utiles, dans la suite du manuscrit, pour appréhender la construction des principes variationnels sur lesquels la formulation de super-éléments repose.

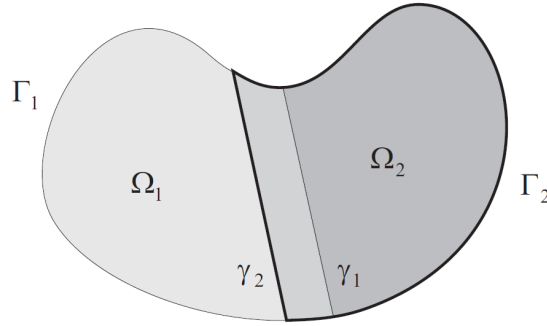
Les techniques de décomposition de domaine peuvent se classer en deux catégories : les méthodes avec recouvrement, et les méthodes sans recouvrement. Sans perte de généralité, les différentes méthodes sont présentées dans le cas où le domaine complet Ω est décomposé en deux sous-domaines.

1.2.1 Méthodes avec recouvrement

Une méthode avec recouvrement consiste à décomposer le domaine complet Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 tel que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ (Figure 1.6). Comme le montre la Figure 1.6, deux types de frontières coexistent alors : les frontières réelles Γ_1 et Γ_2 avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$, et les frontières virtuelles γ_1 et γ_2 qui sont incluses dans les domaines Ω_2 et Ω_1 , respectivement.

Tableau 1.1 – Comparatif de méthodes numériques pour la modélisation des tôles perforées dans les calculs de structures. Classement de très mauvais (+) à très bon (+ + + + +) [9].

Technique numérique	Capacité à localiser les champs autour de la perforation	Coût de la représentation de la perforation	Capacité à représenter l'assemblage riveté	Application à la dynamique rapide	Capacité à s'implanter dans un code EF standard
FEM	+ + + + +	+	+ + + + +	+ + + + +	+ + + + +
BEM	+ + + + +	+	+ + + + +	+	+
PU, XFEM, Meshless	+ + + + +	+ + +	+ +	+ + +	+ +
EF ²	+ + + + +	+ +	+ + + +	+ + + +	+ + +
Multi-échelles (approche séquentielle)	+	+ + + + +	+	+ +	+ + + + +
Multi-échelles (approche intégrée)	+ + + + +	+ +	+	+ +	+

FIGURE 1.6 – Décomposition du domaine Ω : méthode avec recouvrement [23].

1.2.1.1 Méthode de Schwarz

Historiquement, les méthodes avec recouvrement ont pour origine la méthode de *Schwarz* [24]. L’auteur propose de décomposer le domaine d’étude, qui peut être géométriquement complexe, en deux sous-domaines de géométrie plus simple qui se recouvrent. Cette méthode itérative consiste à résoudre le problème complet de manière alternée sur chaque sous-domaine Ω_1 et Ω_2 (Figure 1.6). Pour chacun des sous-domaines Ω_k , la condition aux limites appliquée sur la frontière virtuelle correspondante γ_k est imposée par le sous-domaine voisin à chaque itération. La solution globale est alors calculée en résolvant successivement le problème aux limites associé au sous-domaine Ω_1 puis celui associé au sous-domaine Ω_2 . La façon dont est mise à jour la solution du problème à chaque itération détermine deux variantes de la méthode : la méthode de Schwarz multiplicative et la méthode de Schwarz additive. Ces deux approches sont détaillées dans la référence [23].

1.2.1.2 Méthode Arlequin

La méthode *Arlequin*, initialement introduite par Ben Dhia [25], est aussi une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement. Cette méthode permet non seulement de coupler des modèles de structures différentes (par exemple, le couplage entre un modèle poutre et un modèle 3D), mais aussi des modèles dont la discrétisation est différente. La méthode Arlequin est particulièrement adaptée aux approches multi-échelles puisqu’elle permet la superposition d’un modèle local sur un modèle global dans des zones d’intérêt du domaine où des phénomènes mécaniques locaux complexes peuvent avoir lieu. Typiquement, il s’agit de superposer un sous-domaine maillé finement (appelé aussi patch), dans des zones particulières (e.g, zones de concentrations de contraintes), sur le maillage d’une structure de grande dimension dont le maillage est souvent plus grossier. La particularité de cette méthode est que les différents modèles sont raccordés dans le volume, et non pas sur une frontière, comme c’est le cas pour une méthode *sans* recouvrement, comme nous le verrons par la suite. Ainsi, les sous-domaines ne sont pas contraints à présenter

des interfaces géométriquement compatibles entre elles, et peuvent alors être superposés, totalement ou partiellement, de façon non conforme.

La méthode Arlequin repose sur trois principes :

1. *La superposition des modèles*, i.e. la superposition de deux états mécaniques dans la zone de recouvrement $S = \Omega_1 \cap \Omega_2$ (Figure 1.7(a)).
2. *La répartition de l'énergie entre les sous-modèles*. Du fait de la coexistence de deux états mécaniques superposés, l'énergie entre ces deux états doit être répartie de manière à respecter la conservation de l'énergie [26]. Le travail virtuel associé à chaque sous-domaine est, par conséquent, pondéré par des fonctions, appelées fonctions de pondération, afin de ne pas compter deux fois l'énergie du système global au niveau de la zone de recouvrement. Ces fonctions peuvent être constantes ou variables, mais elles ont la particularité de former une partition de l'unité, dans le sens où leur somme sur le domaine complet Ω vaut toujours 1. Elles sont définies par les Équations (1.2.1)-(1.2.2).

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \Omega_1 &\rightarrow [0, 1] \\ \alpha_2 : \Omega_2 &\rightarrow [0, 1] \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 & \text{sur } \Omega_1 \setminus \Omega_2 \\ \alpha_2 = 1 & \text{sur } \Omega_2 \setminus \Omega_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 & \text{sur } S = \Omega_1 \cap \Omega_2 \end{cases} \quad (1.2.2)$$

3. *Le raccordement des sous-modèles de manière faible*. Le collage des deux modèles superposés sur la zone de recouvrement est assuré grâce à l'introduction d'un opérateur de couplage énergétique dans la formulation variationnelle du problème. Cet opérateur fait intervenir des forces fictives de couplage qui permettent de contrôler l'écart entre les états mécaniques (déplacements, déformations, contraintes, etc.). Ce champ de forces fictives est, en fait, un champ de multiplicateurs de Lagrange. Une certaine liberté peut être, de plus, accordée aux deux modèles en écrivant les conditions de collage sur une partie uniquement de la zone de recouvrement S , appelée zone de collage S_g (Figure 1.7(b)).

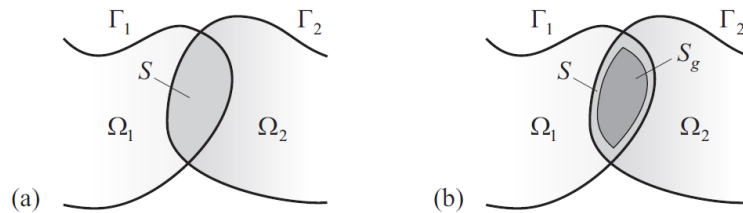


FIGURE 1.7 – Méthode Arlequin (a) Zone de recouvrement S , (b) Zone de collage S_g [23].

Trois types d'opération de modélisation peuvent être réalisées avec la méthode Arlequin [27] : le *zoom* qui permet de superposer un modèle fin, en termes de taille de maille

ou de degré d'approximation par exemple, sur un modèle grossier dans une zone d'intérêt ; la *jonction* qui permet de relier des modèles de natures différentes qui se recouvrent partiellement (e.g., couplage modèle 2D/modèle poutre) ; et la *substitution* qui permet de modifier localement un modèle (e.g., introduction d'un défaut, comme une fissure, un trou ou une inclusion, dans le modèle sain d'une structure sans toucher au maillage de ce dernier).

Un des aspects particuliers de la méthode Arlequin apparaît en dynamique. En effet, cette méthode permet de gérer la propagation des ondes entre les différents sous-domaines, sans piéger l'énergie dans la zone de recouvrement [28]. Ce phénomène peut, par contre, être observé lorsqu'une méthode de décomposition de domaine *sans* recouvrement est utilisée, puisque des réflexions d'ondes parasites peuvent avoir lieu au passage des interfaces entre les sous-domaines [29].

1.2.2 Méthodes sans recouvrement

Contrairement aux méthodes avec recouvrement, le domaine complet Ω est ici décomposé en deux domaines ouverts disjoints Ω_1 et Ω_2 et une interface de liaison Γ_l , comme illustré par la Figure 1.8. Les méthodes sans recouvrement sont des méthodes très utilisées

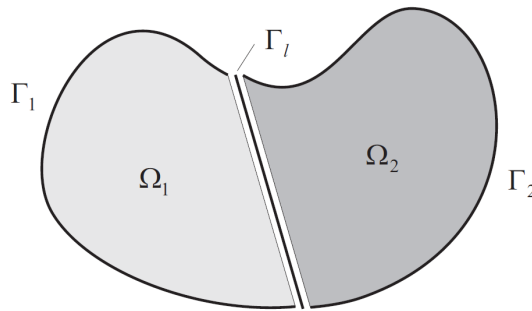


FIGURE 1.8 – Décomposition du domaine Ω : méthode sans recouvrement [23].

en mécanique des structures et elles sont particulièrement adaptées au calcul parallèle. Voici quelques exemples de méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement extraits de la littérature.

1.2.2.1 Méthode de Schur

Les méthodes sans recouvrement sont basées sur la méthode de *Schur*. Historiquement appelées méthodes de sous-structuration, elles ont été introduites par Przemieniecki [30] dans le contexte des calculs aéronautiques. Plusieurs approches de la méthode de Schur

existent : l'approche primale, duale, et mixte. Une spécificité propre à ce type de méthode est que le système linéaire à résoudre sur le domaine complet est réduit aux seules inconnues d'interface (i.e., on dit que le système est « condensé » sur les inconnues d'interface). Ce qui est intéressant d'un point de vue efficacité puisque le système à résoudre est de plus petite taille que le système initial.

La méthode de *Schur primale* consiste à assurer la continuité des déplacements de manière forte le long de l'interface discrétisée qui sépare les deux sous-domaines maillés Ω_1 et Ω_2 [31]. Autrement dit, il s'agit de vérifier la condition de l'Équation (1.2.3).

$$\mathbf{u}_1(x) = \mathbf{u}_2(x) \quad \forall x \in \Gamma_l \quad (1.2.3)$$

où \mathbf{u}_1 est le champ de déplacements du domaine Ω_1 et \mathbf{u}_2 est celui du domaine Ω_2 .

Pour cela, les degrés de liberté du système linéaire initial $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ sont renumérotés de manière à isoler les inconnues associées à l'interface discrète Γ_l (notés \mathbf{u}_l), et celles associées à chaque sous-domaine (i.e., nœuds de l'interface exclus). Le système, ainsi réécrit, peut finalement être réduit par élimination de Gauss à un système linéaire, dit condensé, où les seules inconnues sont les déplacements associés aux nœuds de l'interface Γ_l . La matrice associée à ce nouveau système est bien connue, elle est appelée la matrice du complément de Schur. Les déplacements associés aux nœuds des sous-domaines Ω_1 et Ω_2 (i.e., nœuds de l'interface exclus) sont déterminés par post-traitement à partir des déplacements des nœuds de l'interface précédemment calculés. L'inconvénient majeur de cette méthode est que les maillages des sous-domaines doivent être compatibles au sens où la même discrétisation doit être utilisée pour les deux sous-domaines.

La méthode de *Schur duale*, aussi connue sous le nom de méthode FETI (i.e., *Finite Element Tearing and Interconnecting*) [32], consiste à assurer la continuité des déplacements à l'interface des sous-domaines de manière faible. Pour cela, la condition de continuité de l'Équation (1.2.3) est affaiblie *via* l'introduction de multiplicateurs de Lagrange notés λ . Ces derniers sont des inconnues supplémentaires ajoutées au problème et représentent les forces d'interaction entre les sous-domaines à l'interface². Nous reviendrons plus en détail sur la technique des multiplicateurs de Lagrange utilisée dans la section suivante (Section 1.2.2.2).

De la même façon que la méthode de Schur primale, une condensation sur les inconnues d'interface est également réalisée. En effet, le système linéaire à résoudre est réduit à un système où les multiplicateurs de Lagrange sont les seules inconnues du problème. Les

2. D'où le terme *duale* pour qualifier cette méthode, par opposition à la méthode *primale* où les inconnues d'interface sont les déplacements.

déplacements nodaux de chaque sous-domaine (i.e., nœuds de l'interface inclus) sont finalement évalués à partir des multiplicateurs λ précédemment calculés. Par contre, contrairement à la méthode de Schur primale, les maillages des sous-domaines peuvent être compatibles ou incompatibles grâce à la condition de continuité affaiblie. De plus, elle est plus facile à mettre en place que l'approche primale car, ici, il n'est pas nécessaire de renuméroter les degrés de liberté pour séparer ceux qui sont associés aux nœuds de chaque sous-domaine et ceux qui sont associés à l'interface Γ_l . L'interface est, en quelque sorte, traitée de manière disjointe par rapport aux sous-domaines.

La méthode *mixte* consiste à imposer, à la fois, la continuité des déplacements (Équation (1.2.3)) et l'équilibre des efforts à l'interface au moyen d'une inconnue qui est une combinaison linéaire des inconnues cinématiques \mathbf{u}_l et des inconnues statiques λ . Dans ce type d'approche, les interfaces sont des entités à part entière qui disposent de leurs propres inconnues, de leurs propres équations et de leur propre comportement [23]. Ainsi, des comportements d'interface plus complexes peuvent être gérés (contact, frottement, endommagement, etc.). On peut, par exemple, citer la méthode LATIN (LArge Time INcrement) [33] qui est une méthode mixte.

1.2.2.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Le lien entre deux sous-domaines, notés ici Ω^1 et Ω^2 , dont les approximations sont respectivement \mathbf{u}^1 et \mathbf{u}^2 , peut être assuré par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange λ , définis sur l'interface Γ_l (Figure 1.9).

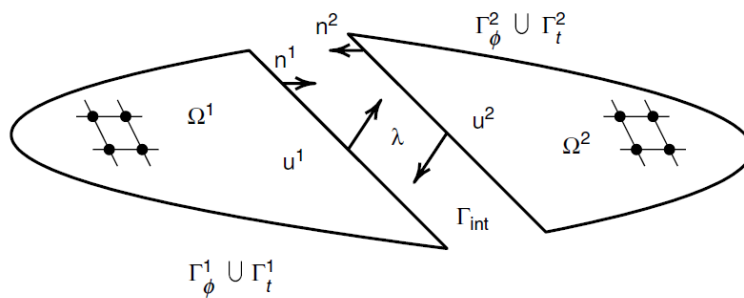


FIGURE 1.9 – Connexion de deux sous-domaines le long d'une interface par multiplicateurs de Lagrange [11].

L'équilibre sur chaque sous-domaine est obtenu en écrivant le principe de l'énergie potentielle totale et la contribution de l'interface sur le sous-domaine considéré (par formulation

directe sous forme résiduelle) :

$$\delta \Pi_{\text{TPE}}(\mathbf{u}^1) - \int_{\Gamma_l} \delta(\mathbf{u}^1)^t \boldsymbol{\lambda} dS = 0 \quad (1.2.4)$$

$$\delta \Pi_{\text{TPE}}(\mathbf{u}^2) - \int_{\Gamma_l} \delta(\mathbf{u}^2)^t \boldsymbol{\lambda} dS = 0 \quad (1.2.5)$$

De plus, les équations de sous-domaines (1.2.4) et (1.2.5) sont complétées par la forme faible de la continuité des déplacements, écrite le long de l'interface Γ_l connectant les sous-domaines :

$$\int_{\Gamma_l} \delta \boldsymbol{\lambda}^t (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) dS = 0 \quad (1.2.6)$$

Notons que les champs discrétisés sont : les déplacements dans chaque sous-domaine, \mathbf{u}^1 et \mathbf{u}^2 , et les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ définis sur l'interface. De manière générale, les multiplicateurs de Lagrange sont choisis de manière à former des termes conjugués énergétiques (« energy conjugates » [34]). Dans le cas particulier de l'Équation (1.2.6), il s'agit du vecteur contrainte défini sur l'interface Γ_l . Une fonctionnelle peut alors être construite (Équation (1.2.7)) dont la condition de stationnarité par rapport à \mathbf{u}^1 , \mathbf{u}^2 et $\boldsymbol{\lambda}$ génère respectivement les Équations (1.2.4), (1.2.5) et (1.2.6).

$$\Pi(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^2 \Pi_{\text{TPE}}(\mathbf{u}^i) + \int_{\Gamma_l} \boldsymbol{\lambda}^t (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) dS \quad (1.2.7)$$

Cette fonctionnelle permet finalement de décrire à la fois le comportement de chaque sous-domaine et de l'interface. C'est en fait un problème dit « sous contraintes ». Minimiser une fonctionnelle sachant que la solution u du problème doit vérifier une contrainte $g(u) = 0$ sur un domaine V est résolu en ajoutant à la fonctionnelle le terme $\int_V \lambda^t g(u) dV$ [35]. La condition de stationnarité de la nouvelle fonctionnelle par rapport à λ permet de vérifier la contrainte.

Pour la discrétisation des multiplicateurs de Lagrange, une méthode de type *Mortar*, introduite par Bernardi *et al.* [36], peut être utilisée. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de connecter des maillages sans qu'il y ait adéquation sur l'interface des nœuds de chaque sous-domaine (Figure 1.10). Les maillages dans chaque sous-domaine peuvent alors être de tailles différentes, ce qui est intéressant pour analyser plus finement une zone d'intérêt particulière. Cette méthode permet également de coupler des approximations qui sont de degrés différents dans chaque sous-domaine.

L'utilisation des multiplicateurs de Lagrange présente deux inconvénients : ils doivent être discrétisés (i.e., des inconnues supplémentaires sont donc ajoutées dans le système

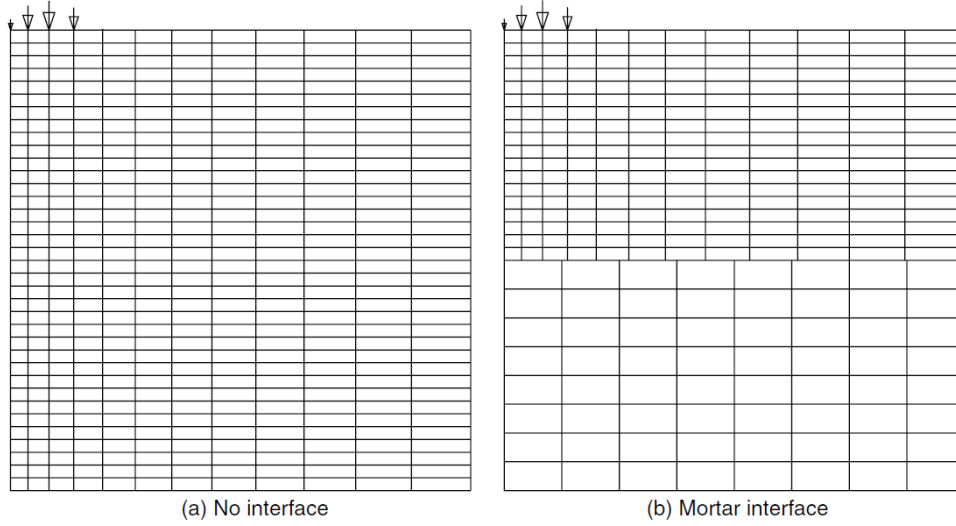


FIGURE 1.10 – (a) Maillage sans interface Mortar (compatibilité), (b) Maillage avec interface Mortar (incompatibilité) [11].

linéaire à résoudre) et créent souvent des systèmes à diagonale nulle³. Il est possible d'éviter ces deux inconvénients en ayant recours à la méthode de pénalité (Section 1.2.2.3), ou à la méthode du Lagrangien perturbé (Section 1.2.2.4).

1.2.2.3 Méthode de pénalité

La méthode de pénalité consiste à ajouter le terme apparaissant dans l'Équation (1.2.8) à la fonctionnelle que l'on cherche à minimiser.

$$\frac{1}{2} \alpha \int_{\Gamma_i} (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1)^t (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) dS \quad (1.2.8)$$

où α , appelé le paramètre de pénalité, est un scalaire grand et supérieur à zéro.

La solution obtenue en minimisant la nouvelle fonctionnelle ne satisfait pas exactement la contrainte de continuité des déplacements à l'interface, mais elle la vérifie de manière approximative. Plus le paramètre de pénalité α est grand, plus la contrainte de continuité est mieux vérifiée. L'avantage de cette approche est qu'aucune inconnue supplémentaire n'est ajoutée au système linéaire contrairement à la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Par contre, l'inconvénient de cette méthode réside dans le choix du paramètre α .

3. La matrice du système linéaire à résoudre possède des zéros sur la diagonale, elle n'est donc pas définie positive. Les techniques classiques de résolution (e.g., factorisation de Cholesky, méthode du gradient conjugué) ne sont donc plus applicables [13].

1.2.2.4 Méthode du Lagrangien perturbé

La méthode du Lagrangien perturbé consiste à enrichir la méthode des multiplicateurs de Lagrange avec un terme quadratique. L'Équation (1.2.6) de la méthode des multiplicateurs de Lagrange est alors remplacée par :

$$\int_{\Gamma_l} \delta \boldsymbol{\lambda}^t (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) dS - \frac{1}{\alpha} \int_{\Gamma_l} \delta \boldsymbol{\lambda}^t \boldsymbol{\lambda} dS = 0 \quad (1.2.9)$$

où α est un scalaire grand et supérieur à zéro. Lorsque α tend vers l'infini, la forme initiale de la méthode des multiplicateurs de Lagrange est retrouvée (Équation (1.2.6)).

La résolution de l'Équation (1.2.9) en tous points de la frontière Γ_l donne [11] :

$$\boldsymbol{\lambda} = \alpha(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \quad (1.2.10)$$

Lorsque l'Équation (1.2.10) est remplacée dans les Équations (1.2.4)-(1.2.5), un nouveau système, qui peut s'apparenter à une méthode de pénalité, est obtenu.

1.2.2.5 Interface de déplacements indépendante

Les interfaces de déplacements indépendantes (« Frame Method ») emploient les multiplicateurs de Lagrange et sont particulièrement pratiques pour la construction de super-éléments finis. En effet, si une interface de déplacements est construite de manière à entourer un sous-domaine (Figure 1.11), il est possible d'éliminer les variables internes du sous-domaine considéré, et de formuler la matrice de rigidité uniquement en fonction des variables de l'interface. L'élément ainsi formulé pourra être couplé directement avec d'autres éléments définis en fonction de ces mêmes variables d'interface, et ce, indépendamment de la façon dont ils ont été formulés [11]. Les synthèses ultérieures montreront que cette méthode est la plus commode pour formuler des super-éléments comportant des discontinuités, en particulier dans un contexte implicite. Dans un contexte dynamique, les méthodes de type Mortar ou Arlequin sembleraient plus adaptées puisque ces méthodes permettent de gérer la propagation des ondes aux interfaces entre sous-domaines, ce qui éviterait ainsi les réflexions d'ondes et le piège de l'énergie dans le super-élément.

1.3 Formulation d'éléments finis à partir de principes variationnels

L'objet de cette section est de présenter les différents principes variationnels de la littérature qui permettent la formulation d'éléments finis. Un état de l'art sur les principes

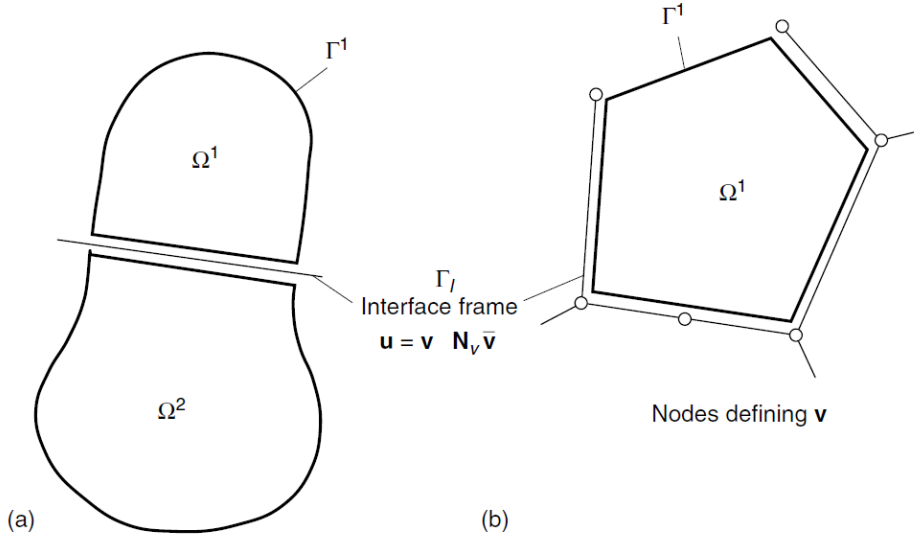


FIGURE 1.11 – Interface de déplacements indépendante (a) Entre deux sous-domaines, (b) Entourant un sous-domaine [11].

variationnels est effectué dans la référence [9]. Une synthèse de cette étude bibliographique est proposée ici.

La formulation de principes variationnels consiste, tout d'abord, à considérer un problème physique sous sa forme forte, i.e. décrit par un système d'équations. Il s'agit, dans un second temps, de choisir les champs qui seront interpolés de manière indépendante ainsi que les équations fortes qui seront affaiblies⁴. Différents types de principes variationnels peuvent alors être construits en fonction des équations affaiblies et du choix des champs interpolés [37,38]. Ainsi, à chaque type de principe correspond un type d'élément fini possédant une propriété particulière.

Les principes variationnels sont répertoriés en deux catégories [37] : les principes à champ unique, où un seul champ est soumis à variation ; et les principes multi-champs, où plusieurs champs sont soumis à variation (Figure 1.12). Parmi les principes à champ unique, le principe de l'énergie potentielle totale (TPE) ainsi que le principe de l'énergie potentielle totale complémentaire (TCPE) peuvent, par exemple, être mentionnés. Le champ soumis à variation pour chacun de ces deux exemples est, respectivement, le champ des déplacements \mathbf{u} et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. Les équations affaiblies pour la construction du principe TPE sont l'équation d'équilibre et les conditions aux limites en effort ;

4. Une méthode basée sur les diagrammes de Tonti facilite la construction des principes variationnels à champ unique et mixtes grâce à une représentation graphique des équations affaiblies et des liens entre les champs. L'exemple du diagramme de Tonti de la forme faible permettant la construction du principe Hellinger-Reissner est présenté dans la référence [9].

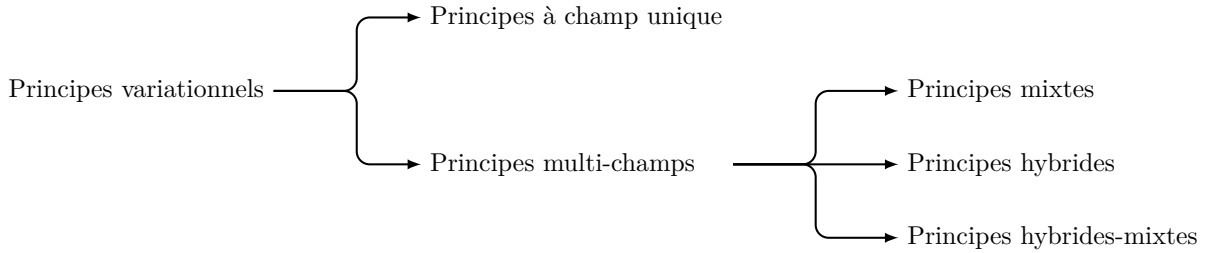


FIGURE 1.12 – Classification des principes variationnels [37].

celles affaiblies pour la construction du principe TCPE sont les équations de compatibilité et les conditions aux limites en déplacement [39]. Parmi les principes multi-champs, plusieurs types de principes peuvent être recensés (Figure 1.12) :

- les principes *mixtes* qui interpolent plusieurs champs d'intérieur de domaine,
- les principes *hybrides* qui interpolent un champ d'intérieur de domaine et un ou plusieurs champs d'interface, et
- les principes *hybrides-mixtes* qui interpolent plusieurs champs d'intérieur de domaine et un ou plusieurs champs d'interface.

Le principe Hellinger-Reissner est, par exemple, un principe mixte à deux champs où les champs soumis à variation sont les champs d'intérieur de domaine \mathbf{u} et $\boldsymbol{\sigma}$. Les équations affaiblies, pour la construction de ce principe, sont l'équation d'équilibre, les conditions aux limites en effort, et la compatibilité des déformations [40]. Le principe Fraeijns de Veubeke-Hu-Washizu est un autre exemple de principe mixte, où trois champs sont soumis à variation : les champs de déplacements \mathbf{u} , de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, et de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ici, les équations affaiblies sont l'équation d'équilibre, les conditions aux limites en effort et en déplacement, et la compatibilité des contraintes et déformations [41].

Le terme de principe *hybride* est apparu pour la première fois dans la littérature en 1969, dans un article de Pian et Tong [42]. Les principes hybrides sont qualifiés par Tong [43] comme étant une extension des principes à champ unique. Les principes *hybrides-mixtes* ont, quant à eux, été introduits par Pian en 1995 [44], et sont considérés comme une extension des principes mixtes. Cette extension est, en fait, réalisée en utilisant des multiplicateurs de Lagrange qui permettent d'introduire un ou plusieurs champs d'interface interpolés indépendamment du ou des champs d'intérieur de domaine⁵. Dans le cadre de la formulation d'éléments finis, cette technique permet notamment d'assurer la continuité de certains champs au travers de l'interface inter-éléments.

Toutes les formulations hybrides, i.e. les principes hybrides et hybrides-mixtes⁶, peuvent

5. Les multiplicateurs de Lagrange sont choisis de manière à former des conjugués énergétiques, c'est-à-dire que les produits formés lors de l'affaiblissement des équations représentent de l'énergie ou du travail [9].

6. Les principes hybrides et hybrides-mixtes ne peuvent être représentés par un diagramme de Tonti car l'origine du champ d'interface introduit et son lien avec les autres champs est difficile à définir [9].

être déclinées selon deux modèles : le modèle déplacement [43] et le modèle contrainte [45]. Lorsque le multiplicateur de Lagrange défini à l'interface est le vecteur contrainte, i.e. lorsque la continuité des déplacements est assurée à l'interface, alors il s'agit d'un modèle déplacement. Par contre, lorsque le multiplicateur de Lagrange est le champ des déplacements, i.e. lorsque la continuité des efforts est assurée à l'interface, alors il s'agit d'un modèle contrainte. Les formulations hybrides présentent donc un grand intérêt dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine puisqu'elles permettent le « collage » de sous-domaines séparés par des interfaces [37]. Les principes de la famille hybride-contrainte permettent le collage de sous-domaines dont les propriétés matériau sont différentes (continuité des contraintes à l'interface sous forme faible). Les principes de la famille hybride-déplacement [43] permettent, quant à eux, de formuler des super-éléments en assurant le collage de l'élément fini spécial avec des éléments finis classiques (continuité des déplacements à l'interface sous forme faible). Dans ce cas, le collage est réalisé au moyen d'une interface de déplacements indépendante, tel que présenté dans la Section 1.2.2.5.

Parmi les formulations hybrides, il existe un principe hybride particulier appelé principe *hybride-Trefftz*. Il repose sur des fonctions d'interpolation qui satisfont *a priori* les équations d'intérieur de domaine, ce qui permet la formation d'un système ne nécessitant que des intégrations aux frontières (pas d'intégrations d'intérieur de domaine). La version déplacement de ce principe est d'ailleurs utilisée pour la formulation de super-éléments perforés, dont le développement est détaillé dans la Section 1.5.1. Il est démontré dans la référence [9], en accord avec Freitas [38], que les principes de la famille hybride, i.e. les principes hybrides-mixtes, hybrides et hybrides-Trefftz, sont liés. En effet, le fait de contraindre le principe hybride-mixte à respecter de plus en plus d'équations d'intérieur de domaine (équations fortes) conduit successivement au principe hybride et au principe hybride-Trefftz, comme cela est illustré dans la Figure 1.13 dans le cas d'un modèle déplacement. Le principe hybride-mixte est le plus général étant donné qu'il est contraint à respecter un minimum d'équations fortes. Les principes hybride-mixte et hybride sont tous deux plus flexibles que le principe hybride-Trefftz car ils ne sont pas contraints à respecter autant d'équations fortes que le principe hybride-Trefftz. Chaque type de principe correspond donc à un niveau de contrainte particulier (Figure 1.14).

Les fonctions d'interpolation doivent également respecter un certain nombre de contraintes qui peut varier en fonction du principe choisi. La formulation hybride-mixte est, donc, la plus flexible par rapport au choix des fonctions d'interpolation, puisqu'elles ne sont pas contraintes à respecter localement les équations d'intérieur de domaine [38]. Cependant, les principes hybrides-mixtes ont tendance à produire des systèmes matriciels creux comportant un grand nombre de degrés de liberté. En revanche, les fonctions d'interpolation sont contraintes à respecter l'ensemble des équations d'intérieur de domaine de manière forte lorsqu'un principe hybride-Trefftz est employé, mais produisent des systèmes pleins [38]. Elles sont donc plus complexes à générer et conduisent à des intégrations numériques

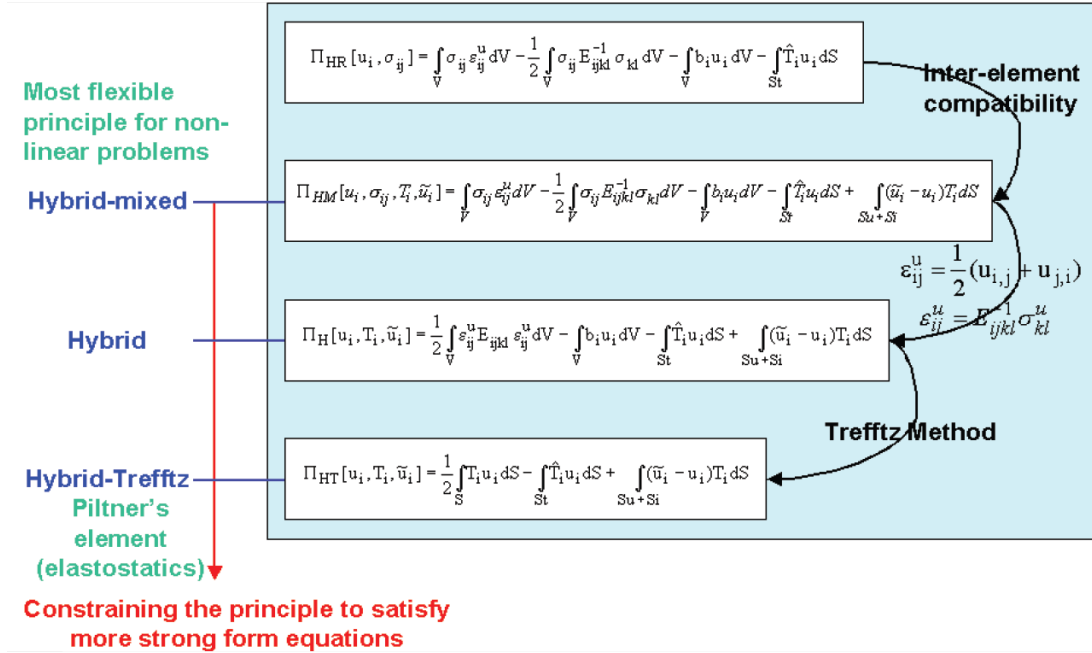


FIGURE 1.13 – Relations entre les principes variationnels de type hybride déplacement [46].

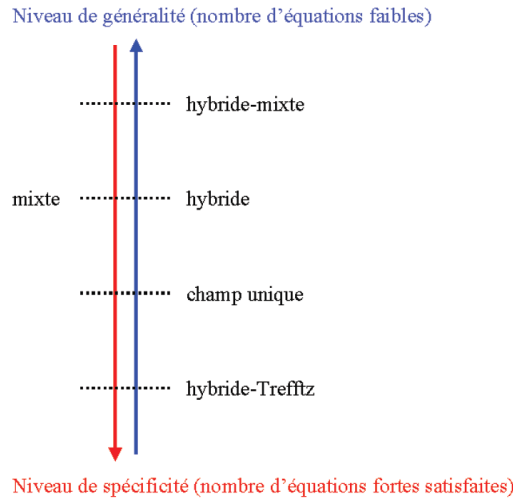


FIGURE 1.14 – Principes variationnels et niveaux de contrainte [9].

plus lourdes.

1.4 Super-éléments finis pour la modélisation des discontinuités

La recherche bibliographique met en évidence l'existence d'éléments finis spéciaux, appelés « super-éléments », qui permettent de modéliser des discontinuités géométriques ou

matérielles sans qu'un maillage raffiné soit nécessaire en leur voisinage. En effet, depuis le début des années 70, des super-éléments qui comportent des trous, des fissures, ou encore des inclusions rigides ou élastiques ont été développés.

L'étude de l'influence de ces discontinuités géométriques et matérielles est essentielle, car des concentrations ou des intensités de contraintes peuvent se produire en leur voisinage, et provoquer ainsi l'amorçage et la propagation de fissures. Cependant, les techniques numériques classiques consistant à utiliser un maillage très fin dans les zones à proximité des discontinuités ne sont pas toujours adaptées pour plusieurs raisons. D'abord, parce que les temps de calcul générés peuvent être prohibitifs ; d'autant plus que, pour des questions de précision, un maillage particulièrement raffiné est généralement nécessaire⁷. Ensuite, parce que le maillage peut être complexe, comme c'est le cas du maillage d'un matériau hétérogène, par exemple, qui comporte un grand nombre d'inclusions, de tailles et de formes qui peuvent être très différentes les unes des autres. Enfin, parce que si on se place dans le cadre d'un problème multi-échelles où la plus petite échelle correspond à celle des discontinuités (qui peuvent avoir une forte influence au niveau macroscopique), alors celles-ci ne peuvent pas être raisonnablement maillées finement si elles sont nombreuses. C'est d'ailleurs dans cette catégorie que s'inscrit la problématique de la modélisation des assemblages rivetés (et en particulier les perforations dans les tôles) dans les calculs de structures aéronautiques complètes.

1.4.1 Modélisation des discontinuités géométriques

Tong *et al.* [48] furent les premiers à formuler un « super-élément » comportant une discontinuité géométrique. Les auteurs définissent un « super-élément » comme un élément fini capable de représenter des champs mécaniques complexes, mais avec peu de degrés de liberté, contrairement aux éléments finis conventionnels linéaires ou quadratiques. Le super-élément de la référence [48], comporte une entaille et permet de calculer avec précision les facteurs d'intensité de contraintes élastiques en pointe de fissure pour des matériaux isotropes. Les fondements de cette formulation reposent sur : (i) le calcul de la solution analytique d'une plaque entaillée isotrope grâce au formalisme de Kolosov-Muskhelishvili [49], et (ii) l'utilisation d'un principe variationnel hybride-Trefftz déplacement (Section 1.3). La méthode des variables complexes de Kolosov-Muskhelishvili [49] permet, en effet, de construire des fonctions d'interpolation particulières pouvant tenir compte de la présence d'une discontinuité (e.g., fissure, trou). Grâce à ce formalisme, une expression analytique du champ des déplacements et du champ des contraintes en fonction de deux potentiels complexes, peut être obtenue.

7. Par exemple, pour un problème de propagation de fissures, la taille de maille minimale en pointe de fissure est de l'ordre de $1\ \mu\text{m}$ [47].

Piltner [50] poursuit les travaux de Tong *et al.* [48] et formule un super-élément qui comporte un trou elliptique en modifiant la géométrie du défaut considéré dans le calcul de la solution analytique sur laquelle il repose. La formulation proposée par Piltner est, d'une certaine manière, complémentaire à celle de Tong car elle permet également de modéliser une fissure interne en fixant à zéro la longueur d'un des axes de l'ellipse.

Dans les années 90, Zhang *et al.* [51] proposent la formulation d'éléments finis polygonaux qui comportent un trou elliptique incliné pour l'analyse micromécanique des matériaux poreux. Le maillage du milieu hétérogène est généré à partir d'un diagramme de Voronoï [52], et la formulation des éléments est basée sur les travaux de Piltner⁸. Ces travaux ont été appliqués dans le cadre de l'évaluation de la tenue mécanique des points soudés par résistance qui comportent des micro-porosités dues au procédé [53]. Une extension pour l'analyse thermo-mécanique des matériaux poreux dont les pores sont soumis à une pression constante uniforme (i.e., les pores sont remplis d'un fluide) a également été proposée par Zeng *et al.* [54]. L'effort de pression appliqué à la frontière de la porosité est introduite de manière faible dans le principe variationnel, et intervient dans le vecteur force du système $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$ à résoudre.

Dhanasekar et Qin *et al.* [55] ont proposé la formulation d'un élément fini hybride-Trefftz comportant un trou elliptique libre de chargement qui, selon les auteurs, est une amélioration de l'élément proposé par Piltner [50]. La formulation du principe et de la matrice de rigidité est similaire à celle proposée par Piltner. Par contre, la méthode de calcul des potentiels de Kolosov-Muskhelishvili, et donc des fonctions d'interpolation de l'élément, est différente afin de rendre la solution plus stable avec l'augmentation du nombre de paramètres (α_j, β_j) . Chacun des deux potentiels est, pour cela, écrit comme la somme de deux fonctions : une partie primaire, et une partie complémentaire. La première partie est relative à l'élément sans le trou elliptique ; la seconde partie correspond à l'élément perforé, dont le trou est soumis à des conditions aux limites en effort particulières qui permettent d'assurer la condition de bord libre dans le problème complet. Une discussion sur la notion de stabilité et de précision des fonctions d'interpolation avec l'augmentation du nombre de paramètres est, d'ailleurs, menée dans la Section 3.3.2. Ensuite, Qin [56] a proposé une extension de l'élément de Piltner afin de considérer des trous elliptiques orientés de manière arbitraire⁹. Pour cela, l'angle de rotation de l'ellipse par rapport à l'axe des abscisses est pris en compte dans la transformation conforme et un nombre de termes différent de celui recommandé par Piltner est utilisé pour décrire les champs

8. Étant donné que Zhang *et al.* ont proposé une formulation « commune » pour des éléments perforés ou des éléments avec inclusion (rigide), il est proposé de se référer à la Section 1.4.2 pour une présentation plus approfondie.

9. Les fonctions d'interpolation utilisées dans la référence [56] correspondent à la version originale des fonctions de Kolosov-Muskhelishvili. La technique précédemment proposée [55] n'est pas utilisée ici.

mécaniques dans l'élément ¹⁰.

Comme une alternative à la formulation de Piltner, Wang et Qin [57, 58] proposent, par la suite, des éléments spéciaux comportant un trou circulaire ou elliptique, dont la formulation est basée sur le concept de solutions fondamentales. Grâce à ce formalisme, les champs de contraintes et de déplacements sont exprimés comme une combinaison linéaire de solutions fondamentales calculées en un certain nombre de points appelés points « sources ». Les points sources virtuels sont situés à l'extérieur de l'élément et sont, généralement, générés à partir des nœuds de l'élément (Figure 1.15). Les solutions fondamentales

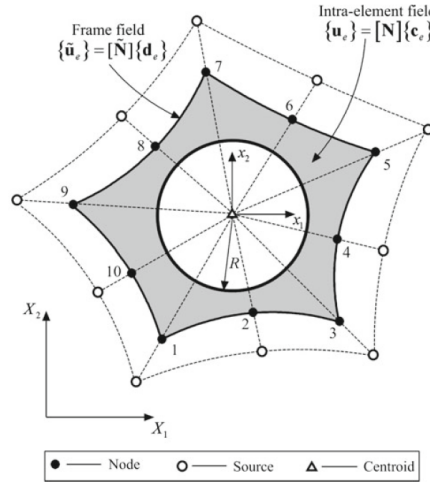


FIGURE 1.15 – Points source pour le calcul des fonctions d'interpolation [57].

considérées sont aussi construites à partir du formalisme de Kolosov-Muskhelishvili [49] et correspondent à la solution d'une plaque infinie comportant un trou (circulaire [57] ou elliptique [58]) soumise à une force ponctuelle $F = F_1 + iF_2$. Les deux potentiels sont déterminés comme la somme d'une partie singulière (solution d'une plaque infinie sans trou soumise à une force, dans le plan, concentrée en un point de la plaque) et d'une partie régulière (solution déterminée de façon à ce que l'effort surfacique sur le contour de la perforation soit nul). Ces solutions fondamentales satisfont *a priori* les équations d'intérieur de domaine, ce qui permet la formation d'un système ne nécessitant que des intégrations aux frontières et pas d'intégration d'intérieur de domaine. Cette technique de construction des fonctions d'interpolation a été, tout récemment, appliquée à l'étude du comportement thermique (problème de conduction de chaleur) des matériaux cellulaires qui comportent des trous circulaires distribués aléatoirement [59].

Finalement, il est proposé de s'intéresser aux super-éléments finis perforés (trou circulaire ou elliptique non-orienté) développés par Soh *et al.* [60–62]. Comme Piltner, les

10. Selon l'auteur [56], tous les paramètres de la solution contribueraient aux contraintes dans le cas d'une perforation elliptique, contrairement au cas d'une perforation circulaire [50].

auteurs s'appuient sur le formalisme de Kolosov-Muskhelishvili [49] pour exprimer les fonctions d'interpolation de ces éléments, mais ces dernières ont la particularité d'être exprimées en fonction de degrés de liberté *physiques*, i.e. qu'ils sont relatifs aux positions nodales du super-élément. De plus, la formulation de ces éléments repose directement sur un principe variationnel TPE ; aucune autre fonctionnelle n'est ajoutée au principe, contrairement à ce qui est fait dans les travaux de Piltner [50]. Ainsi, la matrice de rigidité est déterminée directement à partir de l'énergie de déformation. Cet élément est qualifié d'élément semi-analytique.

Un inconvénient majeur de cette méthode est que le super-élément ainsi formulé ne respecte pas la compatibilité des déplacements inter-éléments, comme cela a été relevé par Piltner [63]. En effet, imposer la compatibilité des déplacements à travers la frontière externe du super-élément est un pré-requis de la Méthode des Éléments Finis (au moins la continuité \mathcal{C}^0 du champ de déplacements entre les éléments). De plus, le calcul de la matrice de rigidité nécessite une intégration sur le domaine perforé 2D, ce qui est beaucoup moins efficace que celle utilisée pour les éléments de type hybride-Trefftz. Suite aux remarques de Piltner, les auteurs ont proposé la formulation d'un élément de type hybride [60] dont la formulation est cette fois similaire à celle proposée par Piltner (principe hybride-Trefftz déplacement, intégrales sur la frontière de l'élément uniquement, etc.). Dans ce cas, notons que l'expression des déplacements en fonction de degrés de liberté physiques n'est ici pas nécessaire.

Plus récemment, Leconte *et al.* [10,64] a clarifié les fondements théoriques de la formulation de Piltner et a proposé un super-élément hybride-Trefftz déplacement comportant un trou circulaire interne, qui est validé pour diverses conditions de chargement. La formulation de ce super-élément, sur laquelle les travaux de la thèse sont basés, est détaillée dans la Section 1.5.

1.4.2 Modélisation des discontinuités matérielles

Des éléments finis particuliers permettant de prendre en compte l'influence de discontinuités matérielles sont développés par Ghosh *et al.* [65–67] dans le cadre de la *Voronoi Cell Finite Element Method* (VCFEM). Cette technique numérique consiste à analyser le comportement des matériaux hétérogènes, tels que les matériaux composites, et en particulier, lorsque ceux-ci comportent des inclusions distribuées de manière aléatoire. Cette méthode est en partie développée dans ce but car les méthodes d'homogénéisation, plus classiquement utilisées dans ce domaine, reposent sur un VER du matériau hétérogène mais disposé de manière périodique. Dans la VCFEM, le domaine hétérogène est modélisé en fonction de sa morphologie par un réseau de cellules de Voronoï (appelé aussi tessellation de Dirichlet) qui tient compte de la position, de la forme, et de la taille des

inclusions [52]¹¹. Chaque cellule de Voronoï, qui comporte au plus une inclusion, est alors considérée comme un élément fini. Ces éléments sont formulés à partir du principe variationnel hybride-contrainte de Pian [45] qui est basé sur le principe de l'énergie potentielle totale complémentaire. Le champ de contraintes, qui est le seul champ d'intérieur de domaine soumis à variation, s'exprime au moyen d'une fonction d'Airy (forme polynomiale).

L'effet de la seconde phase sur la réponse mécanique du matériau a été initialement pris en compte par Ghosh *et al.* [65] *via* une méthode appelée *transformation strain* introduite par Eshelby [68]. Cependant, cette technique sous-estime les contraintes dans l'inclusion [69]. Une autre technique, introduite dans la référence [70], est alors appliquée. Elle consiste à imposer la continuité des efforts à l'interface matrice/inclusion de manière faible en introduisant cette contrainte dans le principe variationnel au moyen de multiplicateurs de Lagrange.

Les travaux de Ghosh *et al.* ont été appliqués et étendus par les auteurs. La méthode VCFEM a été combinée à une méthode d'homogénéisation asymptotique dans le but de réaliser une analyse multi-échelles des matériaux hétérogènes ; l'élément représentatif de la microstructure est alors modélisé par un diagramme de Voronoï [70]. Une forme incrémentale de la fonctionnelle initiale a ensuite été proposée dans la référence [69] afin d'établir une analyse élasto-plastique en petites déformations des microstructures hétérogènes en 2D. Le comportement du matériau constituant de l'inclusion est considéré élastique linéaire, mais la matrice est un matériau élasto-plastique respectant le critère d'écrouissage isotrope de von Mises. Dans la référence [71], les auteurs ajoutent l'influence d'une fissure présente dans l'inclusion dans la méthode VCFEM initiale. Enfin, Ghosh *et al.* [72] proposent de modéliser l'initiation et la propagation de décollements à l'interface matrice/inclusion, mais aussi de fissures dans la matrice, dans les matériaux composites renforcés de fibres *via* l'introduction d'un modèle de zone cohésive à l'interface. Une méthode VCFEM étendue (X-VCFEM) est présentée dans la référence [73].

Toutefois, Zhang *et al.* [74] mettent en évidence que la technique utilisée par Ghosh *et al.* [65] (i.e., *transformation strain*) pour prendre en compte l'influence d'inclusions sur la réponse mécanique d'un matériau hétérogène n'est pas assez prédictive. Cette approche peut prédire l'effet des hétérogénéités sur le matériau dans son ensemble (*via* le calcul de contraintes globales ou le calcul des propriétés élastiques), néanmoins elle ne peut prédire de façon précise les concentrations de contraintes locales qui ont lieu au voisinage des inclusions. Par conséquent, Zhang *et al.* [51, 75, 76] proposent la formulation d'éléments

11. Des techniques expérimentales permettent d'obtenir l'image d'une « section » d'un matériau hétérogène. L'analyse de cette image permet ensuite de générer la tessellation de Dirichlet associée à partir de la position des inclusions, de leur forme, etc. [65].

finis polygonaux¹² qui comportent soit une inclusion (rigide ou élastique), soit un trou, en se basant sur les travaux de Piltner et sur le formalisme de Kolosov-Muskhelishvili [49].

Ces super-éléments sont formulés de la façon suivante. D’abord, dans le cas d’un trou ou d’une inclusion rigide, le principe variationnel est un principe de type hybride-Trefftz déplacement¹³. La compatibilité des déplacements est évidemment assurée au travers de la frontière polygonale et les conditions aux limites sur la frontière interne sont telles que : une condition de bord libre est imposée sur le contour dans le cas du trou, et le champ de déplacements est imposé sur le contour dans le cas d’une inclusion rigide. Ensuite, un comportement plus complexe est pris en compte par les auteurs pour l’inclusion. En effet, dans le cas d’une inclusion élastique, le problème complet est résolu en superposant deux problèmes. Le premier est relatif au comportement mécanique de la matrice et le second à celui de l’inclusion uniquement. Le principe variationnel associé au super-élément avec inclusion est, donc, construit comme la somme de deux potentiels correspondant chacun à l’un des deux problèmes. Il est important de noter que pour relier les deux problèmes de manière cohérente, une condition de continuité des déplacements est introduite à l’interface entre la matrice et l’inclusion. Enfin, quelle que soit la discontinuité considérée (trou, inclusion rigide ou élastique), les champs de contraintes et de déplacements dans l’élément perforé dans le cas du trou ou dans la matrice dans le cas d’une inclusion¹⁴ sont déterminés *via* le formalisme de Kolosov-Muskhelishvili [49]. Notons que, contrairement à l’élément de Piltner, la condition de bord libre à respecter dans le cas d’un trou est externalisée. C’est la raison pour laquelle les deux potentiels complexes sont développés en série, sans qu’aucune condition ne soit imposée au moment du calcul des potentiels [54].

De la même façon que Zhang *et al.*, Dong *et al.* [77, 78] proposent une méthode plus précise (i.e., calcul des champs locaux précis) et plus efficace que la VCFEM pour la modélisation micromécanique des matériaux composites ou poreux : la T-Trefftz Voronoï Cell Finite Element Method (VCFEM-TT). Trois types d’hétérogénéités sont considérés dans ces travaux : l’inclusion élastique ou rigide, et le trou. La formulation de ces éléments est similaire à celle proposée par Zhang *et al.* [51, 75, 76], mis à part deux différences majeures. Premièrement, ils proposent de normaliser les fonctions d’interpolation¹⁵

12. Dans leurs travaux, Zhang *et al.* conservent la méthode de génération de maillage pour les matériaux hétérogènes développée par Ghosh *et al.* [65].

13. Dans les références [51, 75], le principe sur lequel repose la formulation de cet élément est un principe Hellinger-Reissner qui est contraint à satisfaire de plus en plus d’équations fortes.

14. Les champs mécaniques dans l’inclusion, lorsqu’elle est élastique, sont également déterminés *via* le formalisme de Kolosov-Muskhelishvili [49].

15. Les fonctions d’interpolation sont générées à partir du formalisme Kolosov-Muskhelishvili, de la même manière que Zhang *et al.*

grâce à des grandeurs caractéristiques relatives à l'élément développé¹⁶, afin d'éviter la résolution de systèmes mal-conditionnés. Deuxièmement, une méthode de collocation est adoptée pour assurer non seulement la compatibilité des déplacements inter-éléments au travers de la frontière externe, mais aussi la compatibilité des déplacements à l'interface matrice/inclusion lorsque que le défaut est une inclusion, ou la condition de bord libre lorsque le défaut est une perforation. Cette méthode consiste à assurer ces conditions de manière forte en un certain nombre de points situés sur les frontières considérées et à appliquer une méthode de type moindres carrés. Selon les auteurs, l'utilisation de cette technique permettrait d'éviter de satisfaire la condition LBB (Ladyjenskaia-Brezzi-Babuska), contrairement à une approche par multiplicateurs de Lagrange qui ne satisferait pas *a priori* cette condition. D'après les auteurs, cette condition, dont l'expression est donnée dans la référence [79], est en relation avec la condition qui relie le nombre de nœuds de l'élément avec le nombre de paramètres intervenant dans l'expression analytique des champs de contraintes et de déplacements. Ne pas satisfaire cette condition mènerait à une solution EF instable, voire même à la non-unicité de la solution. Ces travaux ont également été étendus à l'analyse solide des matériaux hétérogènes dans la référence [80]. Le maillage EF considéré dans ce cas est alors constitué de cellules de Voronoï 3D (polyèdres convexes) où chacune comporte au plus une inclusion ou un trou de forme ellipsoïdale.

La méthode VCFEM a également inspiré Cesari *et al.* [81–84] qui proposent le développement d'éléments finis polygonaux comportant une inclusion polygonale élastique pour l'étude des matériaux hétérogènes (composites). La particularité de ces éléments est qu'ils comportent des nœuds internes, contrairement aux super-éléments de la littérature présentés ci-dessus. Le maillage est généré grâce à la méthode proposée par Cesari *et al.* [85] qui est basée sur la tessellation de Dirichlet de Ghosh *et al.* [52]. Les éléments à inclusion polygonale sont formulés dans la référence [81] et sont utilisés pour différentes applications. Dans les références [82, 83], les auteurs proposent d'analyser le comportement des matériaux hétérogènes comportant une fissure. Il s'agit, plus précisément, d'évaluer l'influence de chargements thermo-mécaniques sur les coefficients d'intensité de contraintes, mais aussi sur le calcul des propriétés effectives du matériau ainsi que sur le coefficient d'expansion thermique¹⁷. Dans la référence [84], il est question d'évaluer la réponse micro-et macro-mécanique des matériaux hétérogènes qui comportent des inclusions distribuées de manière périodique ou aléatoire. L'approche est ici plus locale, au sens où les auteurs

16. Dans ces travaux, il ne fait pas mention de transformation conforme (*conformal mapping*). Cette dernière est une méthode classiquement utilisée pour la modélisation de défaut de forme différente, et c'est donc par ce biais que les données géométriques associées au défaut sont introduites dans les fonctions d'interpolation.

17. Plus précisément, il s'agit d'évaluer l'effet des contraintes résiduelles thermiques sur le calcul du SIF (*Stress Intensity Factor*). Ces contraintes résiduelles résultent de la correspondance des coefficients d'expansion thermique de chaque constituant du matériau analysé qui a lieu lors de l'étape de refroidissement du processus de frittage.

recherchent à prédire la distribution des contraintes autour de l'inclusion.

La formulation de ce super-élément repose sur le Principe de l'Énergie Complémentaire Totale. Le principe variationnel est construit comme la somme de deux fonctionnelles, chacune étant associée à un problème : (i) le premier problème concerne l'étude du comportement de la matrice sans l'inclusion (i.e., élément perforé, dont la perforation est polygonale) (ii) le second problème concerne l'étude du comportement de l'inclusion. La superposition des deux problèmes (Figure 1.16) est assurée en imposant que les déplacements le long de la frontière interne de l'élément polygonal du premier problème soient égaux aux déplacements le long de la frontière de l'inclusion du second problème. Cette condition est une condition de compatibilité des déplacements à assurer à l'interface matrice/inclusion. Elle s'exprime aussi naturellement que la compatibilité inter-éléments (frontière externe), à l'aide des fonctions d'interpolation polynomiales (linéaires ou quadratiques), puisque la frontière est polygonale. Concernant le champ de contraintes dans la matrice et dans l'inclusion¹⁸, il s'exprime au moyen d'une fonction d'Airy, de la même manière que les éléments originaux de la VCFEM.

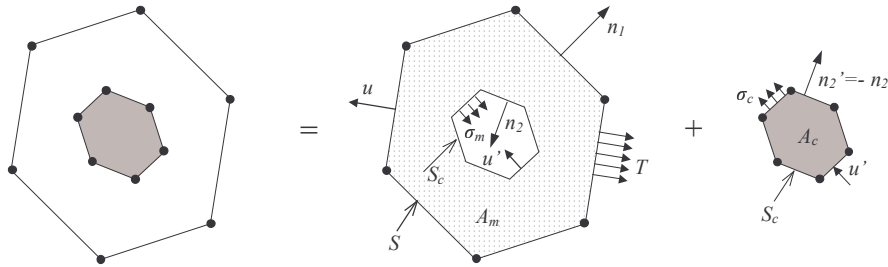


FIGURE 1.16 – Description de la résolution du problème de la formulation d'un super-élément polygonal à inclusion polygonale [81].

Un système linéaire élémentaire du type $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$, où \mathbf{K} est la matrice de rigidité de l'élément, et \mathbf{f} le vecteur force associé, est finalement construit. Le vecteur \mathbf{q} est composé des degrés de liberté associés, à la fois, à la frontière externe et à la frontière interne. La matrice de rigidité est donc définie en 4 blocs. Par contre, avec cette formulation, rien ne garantit que les nœuds des frontières externe et interne interagissent. Autrement dit, les nœuds de la frontière interne peuvent *a priori* se déplacer de manière rigide sans que cela n'agisse sur les nœuds externes. Des contraintes sont donc ajoutées *via* des multiplicateurs de Lagrange introduits dans le principe du problème complet. L'un des inconvénients de cette formulation est que les fonctions d'interpolation associées au comportement de la matrice ne sont pas assez représentatives de l'influence de la discontinuité.

18. Le champ de contraintes est le seul champ d'intérieur de domaine soumis à variation lorsqu'un principe de l'Énergie Complémentaire Totale est utilisé.

1.4.3 Synthèse

Un éventail assez large des différents super-éléments existants dans la littérature pour la modélisation des discontinuités géométriques et matérielles a été présenté¹⁹. Il en ressort que la méthode des variables complexes est la plus adaptée pour calculer les fonctions d'interpolation d'un super-élément comportant une discontinuité, qu'elles soient construites de manière classique ou au travers du concept des solutions fondamentales ; les champs de contraintes et/ou de déplacements au voisinage de la discontinuité étant évalués avec précision. De même, il est conclut que les principes de la classe hybride, généralement employés, sont les plus appropriés pour la formulation de super-éléments. En effet, les super-éléments ainsi formulés sont, par conséquent, compatibles avec les EFs classiques, ce qui facilite leur intégration dans un code de calculs EF standard.

Deux super-éléments sont particulièrement intéressants pour modéliser des discontinuités géométriques. Le premier a été formulé par Leconte *et al.* [10]. Son efficacité et sa précision pour la prédiction des champs de contraintes et de déplacements au voisinage d'une perforation circulaire quel que soit le chargement appliqué ont été montrées. Le second a été formulé par Soh *et al.* [60–62]. Sa particularité est que ses fonctions d'interpolation (fondées sur le formalisme de Kolosov-Muskhelishvili) sont exprimées en fonction de degrés de liberté physiques relatifs aux positions nodales du super-élément. Comme nous le verrons par la suite, les développements proposés dans cette thèse seront basés sur la formulation du super-élément de Leconte *et al.* ainsi que sur la technique utilisée par Soh *et al.* Il est donc proposé de présenter plus en détail leur formulation, notamment la construction du principe variationnel et des fonctions d'interpolation sur laquelle ils sont basés, dans les Sections 1.5 et 1.6.

1.5 Présentation d'un super-élément hybride-Trefftz déplacement comportant un trou

Dans cette section, la formulation d'un super-élément perforé à 8 nœuds de la littérature est présentée [10,50]. La construction du principe variationnel hybride-Trefftz déplacement sur lequel repose ce super-élément est tout d'abord rappelée. Les fonctions d'interpolation spéciales qui permettent de prendre en compte la présence de la perforation sur les champs de contraintes et de déplacements à l'intérieur de cet élément sont ensuite présentées. Enfin, la précision et l'efficacité des résultats numériques obtenus avec le super-élément perforé à 8 nœuds est montrée.

19. D'autres super-éléments auraient pu encore être cités [86–90].

1.5.1 Formulation du principe variationnel

La formulation du super-élément perforé développé par Leconte *et al.* [10] repose sur un principe variationnel de type hybride-Trefftz déplacement (HT-D) [43]. Ce principe est basé sur le principe de l'Énergie Potentielle Totale (TPE) dont l'expression est donnée dans l'Équation (1.5.1) [91].

$$\Pi_{\text{TPE}}(u_i) = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^u \varepsilon_{ij}^u dV - \int_V b_i u_i dV - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i dS \quad (1.5.1)$$

où V correspond à l'intérieur du domaine perforé, S_t représente la frontière où sont imposés les efforts, σ^u représente le tenseur des contraintes, ε^u représente le tenseur des déformations linéarisées²⁰, \mathbf{u} est le vecteur du champ de déplacements, $\hat{\mathbf{T}}$ est le vecteur des efforts imposés, et \mathbf{b} est le vecteur des forces volumiques.

Une fonctionnelle est ensuite ajoutée au principe Π_{TPE} pour assurer la continuité des déplacements entre le super-élément perforé et les éléments finis voisins [43]. Un principe hybride-déplacement, noté $\Pi_{\text{H-D}}$, est alors construit selon l'Équation (1.5.2).

$$\Pi_{\text{H-D}}(u_i, T_i, \tilde{u}_i) = \Pi_{\text{TPE}}(u_i) + \int_{S_u \cup S_i} (\tilde{u}_i - u_i) T_i dS \quad (1.5.2)$$

où $\tilde{\mathbf{u}}$ est le vecteur du champ de déplacements de la frontière inter-éléments interpolé indépendamment, \mathbf{T} est le vecteur traction ($\mathbf{T} = \sigma \cdot \mathbf{n}$, avec \mathbf{n} la normale extérieure unitaire), S_u représente la frontière où sont imposés les déplacements et S_i représente la frontière inter-éléments, c'est-à-dire la frontière où la continuité des déplacements est assurée entre le super-élément et les éléments finis voisins. Notons que cette continuité des déplacements inter-éléments est assurée de manière faible.

Maintenant, en supposant que les forces volumiques sont négligées, en appliquant le théorème de la divergence [39], et finalement, en supposant que les fonctions d'interpolation satisfont *a priori* les équations d'intérieur de domaine (équation d'équilibre et équations de compatibilité), les intégrations d'intérieur de domaine sont réduites à des intégrations aux frontières par le biais de la méthode de Trefftz [50]. Le principe Π_{TPE} s'exprime enfin par l'Équation (1.5.3).

$$\Pi_{\text{TPE}}(u_i, T_i) = \frac{1}{2} \int_S T_i u_i dS - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i dS \quad (1.5.3)$$

où la frontière S est l'union disjointe des trois frontières mentionnées ci-dessus $S = S_u \cup S_t \cup S_i$, S étant la frontière externe du super-élément, et la perforation étant une frontière analytique du super-élément qui est libre de chargement.

20. L'exposant u signifie que la donnée est calculée à partir du champ de déplacements. Autrement dit, le tenseur ε^u s'exprime comme $\varepsilon_{ij}^u = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, et le tenseur σ^u est calculé *via* ε^u et la loi de comportement $\sigma_{ij}^u = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^u$.

Le principe hybride-Trefftz déplacement est finalement construit en introduisant l'expression (1.5.3) dans l'Équation (1.5.2). Son expression est donnée par le principe (1.5.4).

$$\Pi_{\text{HT-D}}(u_i, T_i, \tilde{u}_i) = \frac{1}{2} \int_S T_i u_i \, dS - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i \, dS + \int_{S_u \cup S_i} (\tilde{u}_i - u_i) T_i \, dS \quad (1.5.4)$$

Les champs solutions \mathbf{u} et \mathbf{T} , intervenant dans le principe variationnel du super-élément, sont décomposés en la somme d'une solution homogène, notée $(\mathbf{u}^h, \mathbf{T}^h)$, et d'une solution particulière, notée $(\mathbf{u}^p, \mathbf{T}^p)$, (Équation (1.5.5)).

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^h + \mathbf{u}^p \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^h + \mathbf{T}^p \quad (1.5.5)$$

La solution homogène $(\mathbf{u}^h, \mathbf{T}^h)$ correspond à la solution d'une plaque perforée dont la perforation est libre de chargement. Cette solution s'exprime grâce à des fonctions d'interpolation spéciales et dépend des degrés de liberté (ddls) \mathbf{c} , comme le montre l'Équation (1.5.6). Ces ddls sont qualifiés de ddls *généralisés* puisque ce sont des coefficients qui ne sont pas reliés aux positions nodales d'un élément fini, contrairement aux ddls dits *physiques*. L'expression des fonctions d'interpolation est détaillée dans la Section 1.5.2.

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N}\mathbf{c} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}^h = \mathbf{P}\mathbf{c} \quad (1.5.6)$$

La solution particulière $(\mathbf{u}^p, \mathbf{T}^p)$ correspond, quant à elle, à la solution d'une plaque perforée dont la perforation est soumise à un chargement particulier. Quelques exemples extraits de la littérature sont présentés dans la Section 1.5.4. L'expression du champ de déplacements inter-éléments $\tilde{\mathbf{u}}$ est donnée par l'Équation (1.5.7).

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{q} \quad (1.5.7)$$

où le vecteur \mathbf{q} est le vecteur des ddls nodaux (i.e., *physiques* par opposition avec les ddls *généralisés* \mathbf{c}), et la matrice $\tilde{\mathbf{N}}$ est la matrice des fonctions d'interpolation usuelles associées aux éléments finis polynomiaux (linéaires ou quadratiques) adjacents au super-élément perforé.

Par exemple, l'élément perforé développé par Piltner [50] est formulé de façon à être compatible avec des éléments finis linéaires le long de la frontière S_i , la matrice $\tilde{\mathbf{N}}$ est donc définie par l'Équation (1.5.8).

$$\tilde{\mathbf{u}}_{|[p,p+1]} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{V}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ u_{p+1} \\ v_p \\ v_{p+1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s}{l} & \frac{s}{l} \end{pmatrix} \quad (1.5.8)$$

où (u_p, v_p) est la valeur de $\tilde{\mathbf{u}}$ au nœud p , s l'abscisse curvilinéaire mesurée à partir du point p et l la distance entre les nœuds p et $p + 1$.

Finalement, la matrice de rigidité et le vecteur chargement du super-élément sont obtenus en introduisant les expressions (1.5.5), (1.5.6), et (1.5.7) dans le principe $\Pi_{\text{HT-D}}$ (1.5.4) et en prenant les conditions de stationnarité du principe variationnel (i.e., minimisation par rapport au vecteur \mathbf{c} puis au vecteur \mathbf{q} successivement) [10].

Le principe variationnel est maintenant complètement développé et la matrice de rigidité du super-élément ainsi que le vecteur chargement sont construits. Les fonctions d'interpolation spéciales sur lequel le super-élément est basé doivent être définies.

1.5.2 Fonctions d'interpolation

La méthode des variables complexes de Kolosov-Muskhelishvili (K-M) [49] permet de construire, en particulier, des fonctions d'interpolation spéciales qui sont capables de prendre en compte avec précision l'influence d'un défaut géométrique libre de chargement sur les champs mécaniques. Les champs de déplacements et de contraintes peuvent s'exprimer au moyen de deux fonctions analytiques Φ et Ψ , appelées potentiels de Kolosov-Muskhelishvili (Équations (1.5.9)). Les équations du système de Kolosov-Muskhelishvili ont été établies dans le cadre général de l'élasticité linéaire à partir des équations usuelles de la mécanique, comme cela est montré dans la référence [92].

$$\begin{cases} 2\mu(u_x + iu_y) = k\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \\ \sigma_{xx} + i\sigma_{xy} = \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} - z\overline{\Phi''(z)} - \overline{\Psi'(z)} \\ \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} + z\overline{\Phi''(z)} + \overline{\Psi'(z)} \\ k\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} = 2\mu(\check{u}_x + i\check{u}_y) \text{ sur } \Gamma_u \\ \Phi(z) + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} = i \int (\check{T}_x + i\check{T}_y) ds \text{ sur } \Gamma_t \end{cases} \quad (1.5.9)$$

où $(.)'$ désigne la dérivée complexe, $\overline{(\cdot)}$ représente le conjugué d'un nombre complexe, i est le nombre imaginaire, z est un nombre complexe, k est la constante de Muskhelishvili ($k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ en état de contraintes planes, $k = 3 - 4\nu$ en état de déformation plane, où ν est le coefficient de Poisson), μ est le module de cisaillement du matériau considéré, u_x et u_y sont les composantes du vecteur déplacement, σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} sont les composantes du tenseur des contraintes, \check{u}_x et \check{u}_y sont les valeurs du vecteur déplacement imposées sur la frontière Γ_u , et, \check{T}_x et \check{T}_y sont les valeurs du vecteur traction imposées sur la frontière Γ_t .

À partir du système d'Équations (1.5.9), les équations associées aux contraintes peuvent être réécrites sous la forme de l'Équation (1.5.10).

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\Re\{\Phi'(z)\} \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2(\bar{z}\Phi''(z) + \Psi'(z)) \end{cases} \quad (1.5.10)$$

où $\Re\{z\}$ désigne la partie réelle du nombre complexe z .

Après un calcul simple, les composantes du champ de déplacements et du champ de contraintes peuvent être écrites directement sous la forme de l'Équation (1.5.11).

$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{2\mu} \Re \left\{ k\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \right\} \\ u_y = \frac{1}{2\mu} \Im \left\{ k\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \right\} \\ \sigma_{xx} = \Re \{ 2\Phi'(z) - \bar{z}\Phi''(z) - \Psi'(z) \} \\ \sigma_{yy} = \Re \{ 2\Phi'(z) + \bar{z}\Phi''(z) + \Psi'(z) \} \\ \sigma_{xy} = \Im \{ \bar{z}\Phi''(z) + \Psi'(z) \} \end{cases} \quad (1.5.11)$$

où $\Im\{z\}$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe z .

Une technique de transformation conforme $z = f(\xi)$ est ensuite employée afin d'appliquer les conditions aux limites de la frontière interne (i.e., condition de bord libre) de manière plus simple. Par exemple, un trou circulaire ou elliptique est transformé en cercle unité. Un système équivalent à celui apparaissant dans l'Équation (1.5.9) exprimé maintenant en fonction de la variable complexe ξ est donc obtenu.

Les deux potentiels de Kolosov-Muskhelishvili exprimés en fonction de la variable ξ , $\Phi(\xi)$ et $\Psi(\xi)$, sont ensuite calculés. Pour cela, la fonction analytique Φ est tout d'abord développée en série de Laurent $\Phi(\xi) = \sum_{-N}^M a_j \xi^j$, où les termes $a_j = \alpha_j + i\beta_j$ sont des coefficients complexes, et N et M sont les bornes inférieures et supérieures de la série. La seconde fonction analytique Ψ est obtenue en exprimant la condition aux limites homogène sur la frontière du trou (i.e., condition de bord libre, $\check{T}_x = \check{T}_y = 0$) dans la dernière relation du système apparaissant dans l'Équation (1.5.9), et en introduisant ensuite l'expression de Φ calculée précédemment dans cette même équation.

Les déplacements et les contraintes, pour une plaque comportant un trou circulaire de rayon r_0 qui est libre de chargement, s'expriment finalement sous la forme de séries de Laurent et dépendent des paramètres (α_j, β_j) . Leur expression est donnée par les Équations (1.5.12)-(1.5.16), où l'exposant h indique qu'il s'agit de la solution homogène du problème considéré.

$$\begin{aligned} u_x^h(R, \theta) = & \frac{1}{2\mu} \sum_{j=-N}^M \alpha_j [(kR^j + R^{-j}) \cos(j\theta) - j(R^j - R^{j-2}) \cos(j-2)\theta] \\ & + \beta_j [-(kR^j + R^{-j}) \sin(j\theta) + j(R^j - R^{j-2}) \sin(j-2)\theta] \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

$$\begin{aligned}
 u_y^h(R, \theta) = & \frac{1}{2\mu} \sum_{j=-N}^M \alpha_j [(kR^j + R^{-j}) \sin(j\theta) + j(R^j - R^{j-2}) \sin(j-2)\theta] \\
 & + \beta_j [(kR^j + R^{-j}) \cos(j\theta) + j(R^j - R^{j-2}) \cos(j-2)\theta]
 \end{aligned} \tag{1.5.13}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^h(R, \theta) = & \frac{1}{r_0} \sum_{j=-N}^M \alpha_j j [2R^{j-1} \cos(j-1)\theta - R^{-j-1} \cos(j+1)\theta - \\
 & [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \cos(j-3)\theta] + \\
 & \beta_j j [-2R^{j-1} \sin(j-1)\theta + R^{-j-1} \sin(j+1)\theta + \\
 & [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \sin(j-3)\theta]
 \end{aligned} \tag{1.5.14}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy}^h(R, \theta) = & \frac{1}{r_0} \sum_{j=-N}^M \alpha_j j [2R^{j-1} \cos(j-1)\theta + R^{-j-1} \cos(j+1)\theta + \\
 & [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \cos(j-3)\theta] + \\
 & \beta_j j [-2R^{j-1} \sin(j-1)\theta - R^{-j-1} \sin(j+1)\theta - \\
 & [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \sin(j-3)\theta]
 \end{aligned} \tag{1.5.15}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy}^h(R, \theta) = & \frac{1}{r_0} \sum_{j=-N}^M \alpha_j j [-R^{-j-1} \sin(j+1)\theta + \\
 & [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \sin(j-3)\theta] + \\
 & \beta_j j [-R^{-j-1} \cos(j+1)\theta + \\
 & [(j-1)R^{j-1} - (j-2)R^{j-3}] \cos(j-3)\theta]
 \end{aligned} \tag{1.5.16}$$

où (R, θ) sont les coordonnées polaires, la coordonnée radiale R étant adimensionnalisée, i.e. $R = r/r_0$.

Les champs \mathbf{u}^h et $\boldsymbol{\sigma}^h$ peuvent s'écrire de manière plus concise en introduisant les matrices \mathbf{N} et \mathbf{Q} , qui sont les matrices des fonctions d'interpolation associées aux déplacements et aux contraintes, respectivement (Équation (1.5.17)).

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N}\mathbf{c} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}^h = \mathbf{Q}\mathbf{c} \quad (1.5.17)$$

où \mathbf{c} est le vecteur qui contient les paramètres (α_j, β_j) qui constituent les ddls généralisés du super-élément.

Le vecteur traction homogène, noté \mathbf{T}^h , peut également s'écrire en fonction du vecteur \mathbf{c} (Équation (1.5.18)) puisque $\mathbf{T}^h = \boldsymbol{\sigma}^h \mathbf{n}$ avec $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normale extérieure unitaire.

$$\mathbf{T}^h = \mathbf{P}\mathbf{c} \quad (1.5.18)$$

où la matrice \mathbf{P} est définie comme la matrice des fonctions d'interpolation associée au vecteur traction et s'écrit en fonction de la matrice \mathbf{Q} (Équation (1.5.17)) et de la normale \mathbf{n} telle que $P_{1j} = Q_{1j}n_1 + Q_{3j}n_2$ et $P_{2j} = Q_{2j}n_1 + Q_{4j}n_2$.

Il est important de noter que les fonctions de déplacements (1.5.12)-(1.5.13) tiennent compte des trois modes de corps rigides du plan du super-élément. Les termes responsables sont trivialement α_0, β_0 , pour les deux translations rigides, et β_1 pour la rotation rigide [93]. Ces derniers doivent être retirés pour formuler la matrice de rigidité [50, 93, 94].

1.5.3 Troncature des séries et nombre de nœuds

Les bornes supérieures et inférieures des séries apparaissant dans les Équations (1.5.12)-(1.5.16) sont fixées par rapport au nombre de nœuds de l'élément grâce à la relation (1.5.19) [93].

$$n_u \geq n_\sigma \geq n_q - r \quad (1.5.19)$$

où n_u et n_σ représentent le nombre de paramètres suffisant pour définir les déplacements et les contraintes, n_q est le nombre de ddls physiques de l'élément, et r est le nombre de modes de corps rigides.

Pour l'élément considéré, les champs de déplacements et de contraintes de l'Équation (1.5.17) étant tous les deux exprimés en fonction du vecteur \mathbf{c} , la relation entre n_u et n_σ est telle que $n_u = n_\sigma$. Le problème étant bidimensionnel, n_q correspond à deux fois le nombre de nœuds et le nombre de modes de corps rigides est $r = 3$. Grâce à la relation (1.5.19), le nombre minimum de paramètres requis est fixé en fonction du nombre de nœuds de l'élément à formuler. Dans la littérature [43, 50, 93, 95], il est recommandé de prendre n_σ approximativement égal à $n_q - r$. Ce nombre minimum ne garantit pas toujours une matrice de rigidité de rang maximal. Le rang maximal peut être atteint en augmentant de manière adaptée le nombre de paramètres. Cependant, trop de paramètres pourrait rendre l'élément ainsi formulé trop rigide [43, 93, 95]. La valeur optimale

du nombre de paramètres pour un type d'élément doit être trouvée par des expérimentations numériques [96, 97]. Par exemple, en suivant ces conditions théoriques requises, N et M sont fixés à 4 dans les Équations (1.5.12)-(1.5.16) pour la formulation d'un élément perforé à 8 nœuds (Figure 1.17(a)), et à 8 pour un élément perforé à 16 nœuds (Figure 1.17(b)).

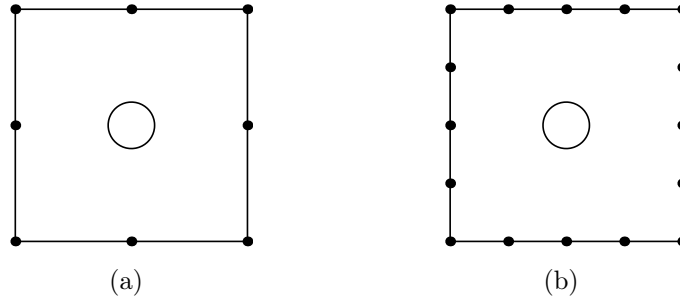


FIGURE 1.17 – (a) Super-élément perforé à 8 nœuds, (b) Super-élément perforé à 16 nœuds.

1.5.4 Conditions aux limites non homogènes sur le contour de la perforation

Afin de considérer des chargements appliqués sur le contour de la perforation du super-élément perforé, il est nécessaire de considérer une solution analytique dite « particulière ». Cette solution donne les champs \mathbf{u}^p et $\boldsymbol{\sigma}^p$ à l'intérieur du super-élément sous l'action d'un chargement appliqué à la perforation. Dans la littérature, il existe différentes solutions particulières, trois d'entre elles sont présentées ici.

Il est important de noter que parmi les solutions particulières présentées dans cette section, seule la première a été évoquée pour formuler des super-éléments dont la perforation est soumise à un chargement. Les deux autres exemples n'ont jamais été associées à des travaux de recherche concernant la formulation de super-éléments. De plus, aucune des trois solutions n'a été concrètement pratiquée pour appliquer un chargement particulier à la perforation d'un super-élément perforé.

Un premier exemple est donné par Piltner [50] qui donne l'expression des champs de déplacements et de contraintes pour une plaque perforée dont le contour du trou circulaire de rayon r_0 est soumis à une pression constante de valeur P et uniformément répartie. La

solution $(\mathbf{u}^p, \boldsymbol{\sigma}^p)$ correspondante est donnée par les relations (1.5.20).

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x^p(R, \theta, P) = \frac{1}{2\mu} P r_0 R^{-1} \cos \theta \\ u_y^p(R, \theta, P) = \frac{1}{2\mu} P r_0 R^{-1} \sin \theta \\ \sigma_{xx}^p(R, \theta, P) = -P R^{-2} \cos(2\theta) \\ \sigma_{yy}^p(R, \theta, P) = P R^{-2} \cos(2\theta) \\ \sigma_{xy}^p(R, \theta, P) = -P R^{-2} \sin(2\theta) \end{array} \right. \quad (1.5.20)$$

Cette solution est calculée à partir de l'Équation (1.5.11) où les fonctions Φ et Ψ s'expriment pour ce cas particulier sous la forme suivante : $\Phi(\xi) = 0$ et $\Psi(\xi) = -\frac{P r_0}{\xi}$, où la variable ξ est définie par la transformation conforme $z = f(\xi) = r_0 \xi$ qui change le cercle de rayon r_0 en cercle unité [49, 93].

Un autre exemple est donné par Muskhelishvili [49] qui donne l'expression des fonctions Φ et Ψ lorsqu'une pression constante est appliquée sur une partie seulement du contour de la perforation, i.e. sur un arc (Figure 1.18). Si une pression constante de valeur P est appliquée sur l'arc orienté $\widehat{z_1 z_2}$ d'une perforation circulaire de rayon r_0 , alors les champs $\mathbf{u}^p(z, P, z_1, z_2)$ et $\boldsymbol{\sigma}^p(z, P, z_1, z_2)$ peuvent s'exprimer grâce aux Équations (1.5.11) où les fonctions Φ et Ψ sont définies par les Équations (1.5.21) et (1.5.22), respectivement.

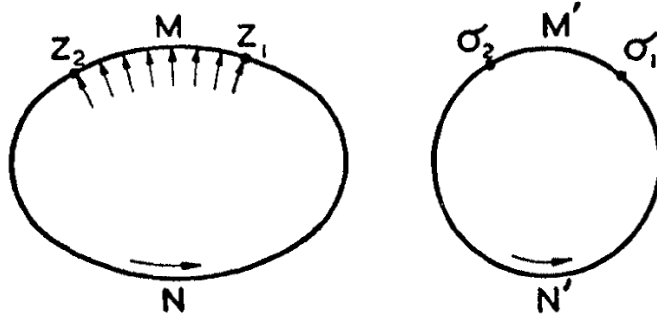


FIGURE 1.18 – Pression constante appliquée sur une partie du contour de la perforation : transformation d'une ellipse en un cercle unité [49].

$$\Phi(\xi) = \frac{P}{2\pi i} \left[(r_0 \xi - z_2) \log(\sigma_2 - \xi) - (r_0 \xi - z_1) \log(\sigma_1 - \xi) - \frac{k(z_1 - z_2)}{k+1} \log \xi \right] \quad (1.5.21)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) = \frac{P}{2\pi i} \left[-\frac{r_0}{\xi} \log \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) + \frac{r_0}{\xi^2} (\sigma_1 - \sigma_2) - \overline{z_2} \log(\sigma_2 - \xi) \right. \\ \left. + \overline{z_1} \log(\sigma_1 - \xi) - \frac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{k+1} \log \xi - \frac{z_1 - z_2}{\xi^2(k+1)} \right] \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

où la fonction $\log(z)$ est le logarithme complexe (cf. Annexe C), et où les points d'affixe σ_1 et σ_2 correspondent respectivement aux points d'affixe z_1 et z_2 dans le plan de la

variable ξ par la transformation conforme $z = f(\xi) = r_0\xi$, i.e. $z_1 = r_0\sigma_1$ et $z_2 = r_0\sigma_2$ (Figure 1.18).

Un dernier exemple est donné par Rothman [98] et Sih [99] qui donnent l'expression des potentiels de Kolosov-Muskhelishvili pour une plaque perforée dont la perforation est soumise à un nombre quelconque de forces concentrées F_r appliquées aux points $z = z_r \in \mathbb{C}$ du contour de la perforation. L'expression de la solution particulière $(\mathbf{u}^p, \boldsymbol{\sigma}^p)$ dans ce cas est donnée par l'Équation (1.5.23).

$$\begin{cases} u_x^p(z, F_r, z_r) = \frac{1}{2\mu} \Re \left\{ k\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\chi'(z)} \right\} \\ u_y^p(z, F_r, z_r) = \frac{1}{2\mu} \Im \left\{ k\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\chi'(z)} \right\} \\ \sigma_{xx}^p(z, F_r, z_r) = \Re \{ 2\Phi'(z) - \bar{z}\Phi''(z) - \chi''(z) \} \\ \sigma_{yy}^p(z, F_r, z_r) = \Re \{ 2\Phi'(z) + \bar{z}\Phi''(z) + \chi''(z) \} \\ \sigma_{xy}^p(z, F_r, z_r) = \Im \{ \bar{z}\Phi''(z) + \chi''(z) \} \end{cases} \quad (1.5.23)$$

où les fonctions Φ et χ sont définies, respectivement, par les Équations (1.5.24) et (1.5.25). Notons que la fonction $\chi'(z)$ est identique à la fonction $\Psi(z)$ qui apparaît dans l'expression initiale des équations de Kolosov-Muskhelishvili (Équation (1.5.9)).

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi} \sum F_r \log \left(\frac{z - z_r}{r_0} \right) + \frac{k \log(z/r_0)}{2\pi(k+1)} \sum F_r \quad (1.5.24)$$

$$\begin{aligned} \chi(z) = & \frac{1}{2\pi} \sum (F_r \bar{z}_r - \bar{F}_r z_r) \log \left(\frac{z - z_r}{r_0} \right) + \frac{z}{2\pi} \sum \bar{F}_r \log \left(\frac{z - z_r}{r_0} \right) \\ & - \frac{z \log(z/r_0)}{2\pi(k+1)} \sum \bar{F}_r - \frac{\log(z/r_0)}{2\pi} \sum F_r \bar{z}_r + \frac{r_0^2 k}{2\pi(k+1)z} \sum F_r \end{aligned} \quad (1.5.25)$$

1.5.5 Résultats numériques

La précision du super-élément hybride-Trefftz déplacement à 8 nœuds (Figure 1.17(a)) est évaluée par Leconte *et al.* dans la référence [10]. Pour cela, une plaque perforée en son centre, soumise à différents chargements externes (i.e., traction uniaxiale, traction biaxiale, et cisaillement pur), est modélisée par le maillage EF de la Figure 1.19 qui est adapté aux calculs de structures et qui comporte le super-élément perforé à 8 nœuds, et par un autre maillage EF fin utilisant des éléments rectangulaires quadratiques standards pour comparaison. Une méthodologie a également été mise en place afin d'analyser les champs \mathbf{u} et $\boldsymbol{\sigma}$ à l'intérieur du super-élément perforé [9].

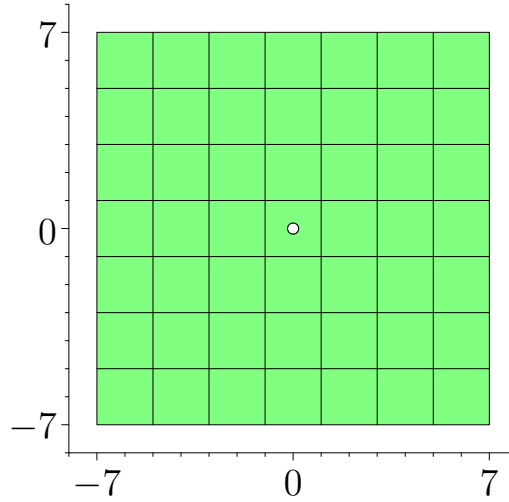


FIGURE 1.19 – Maillage EF contenant le super-élément perforé à 8 nœuds au centre.

Méthode de reconstruction des champs d'intérieur de domaine. La méthode consiste à prélever la valeur des déplacements (u_x, u_y) aux nœuds du super-élément perforé fournie par le calcul EF. Un système linéaire $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ est ensuite construit en supposant que les déplacements calculés à partir des fonctions de K-M aux positions correspondantes aux nœuds du super-élément sont égaux aux déplacements prélevés. Le système linéaire est décrit comme suit :

- \mathbf{c} est un vecteur colonne composé des paramètres (α_j, β_j) , qui sont les inconnues du système à résoudre,
- \mathbf{b} est un vecteur colonne construit à partir des déplacements donnés par le super-élément,
- \mathbf{A} est une matrice constituée des équations associées aux déplacements, Équations (1.5.12)-(1.5.13).

Finalement, après résolution du système $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$, les paramètres (α_j, β_j) de la solution sont identifiés. Par conséquent, en introduisant les paramètres identifiés dans les expressions analytiques (1.5.12)-(1.5.16), les champs de déplacements et de contraintes sont connus partout à l'intérieur du super-élément et en particulier au voisinage de la perforation uniquement à partir des déplacements en 8 nœuds.

Notons que cette méthodologie avait été préalablement mise en place pour étudier les fonctions d'interpolation du super-élément perforé. Dans ce cas, les déplacements (u_x, u_y) sont prélevés sur une solution de référence en des points particuliers, appelés *points de prélèvement*. La solution de référence correspond soit à une solution analytique bien connue, soit à une solution numérique provenant d'une analyse par éléments finis où le maillage est particulièrement raffiné au voisinage de la perforation. Le système linéaire $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ construit ici est obtenu en supposant que les déplacements calculés à partir des fonctions de K-M sont égaux à ceux prélevés sur la solution de référence, le vecteur \mathbf{b} étant maintenant constitué des déplacements prélevés sur la solution de référence.

Résultats numériques. Les résultats numériques obtenus montrent que le super-élément hybride-Trefftz déplacement à 8 nœuds est capable de décrire avec précision les champs de contraintes et de déplacements pour différents cas de chargement. Par exemple, pour le cas d'une traction uniaxiale, la distribution de la contrainte équivalente de von Mises est en accord avec les résultats de référence (Figure 1.20) et l'erreur sur le calcul du facteur de concentration de contraintes est de l'ordre de 1.3 %. De plus, le gain en termes de temps de calcul est très important puisqu'il faut 300 fois moins de temps qu'un calcul EF fin pour simuler un cas-test avec le maillage comportant le super-élément perforé, et pour des résultats équivalents.

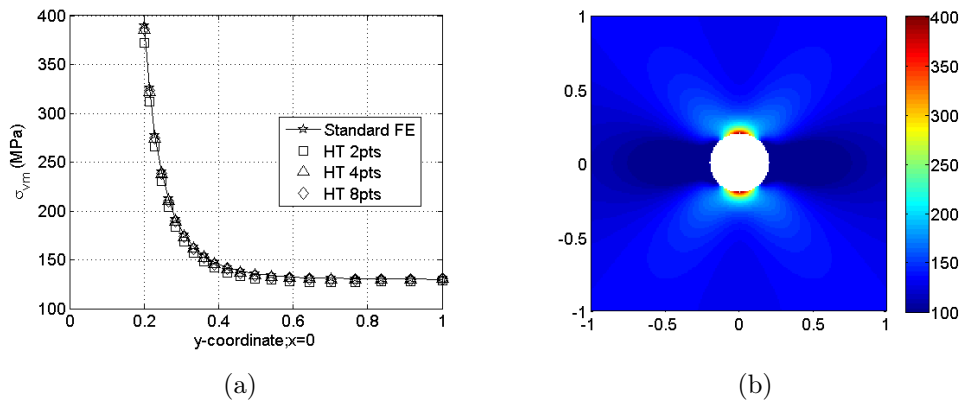


FIGURE 1.20 – (a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises le long de l'axe $\{x = 0\}$ obtenue avec le super-élément à 8 nœuds pour 2, 4 et 8 points de Gauss par côté, et comparaison avec les résultats de référence (maillage EF fin), (b) Distribution de la contrainte équivalente de Von Mises obtenue avec le super-élément perforé à 8 nœuds pour 4 points de Gauss par côté [10].

1.6 Présentation d'un super-élément semi-analytique comportant un trou

Dans cette section, la formulation d'un super-élément perforé semi-analytique développé par Soh *et al.* [60–62] est présentée.

Tout comme le super-élément présenté dans la section précédente (Section 1.5), le super-élément perforé semi-analytique repose sur des fonctions d'interpolation provenant du formalisme de Kolosov-Muskhelishvili [49]. Par contre, il repose directement sur un principe variationnel TPE (Équation (1.5.1)), et aucune fonctionnelle n'est ajoutée au principe. En fait, le super-élément n'est pas un élément hybride de sorte que les déplacements de l'élément semi-analytique sont incompatibles avec les déplacements des éléments voisins le long de sa frontière externe (compatibilité aux nœuds uniquement).

Cependant, contrairement aux autres super-éléments de la littérature qui reposent sur une description des champs en une somme de modes pondérés par des coefficients (i.e., non relatifs à des positions nodales), le champ de déplacements est ici exprimé en fonction de degrés de liberté physiques (i.e., associés à des positions nodales). En effet, étant donné que l'expression du champ de déplacements \mathbf{u} est valide en tous points (Équation (1.5.6)), elle peut être réécrite, par conséquent, en des positions choisies. Supposons n positions particulières correspondant aux coordonnées des nœuds du super-élément, il peut alors être écrit : $\mathbf{u}(x_i, y_i) = \mathbf{U}(x_i, y_i)\boldsymbol{\beta}$ où (x_i, y_i) sont les coordonnées cartésiennes du nœud n° i du super-élément et n correspond au nombre de nœuds du super-élément. Le système donné par l'Équation (1.6.1) est alors obtenu.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(x_n, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \mathbf{U}(x_n, y_n) \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \quad (1.6.1)$$

L'Équation (1.6.1) peut être réécrite de manière plus concise :

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{U}^e \boldsymbol{\beta} \quad (1.6.2)$$

En exprimant le vecteur des coefficients $\boldsymbol{\beta}$ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{U}^e\}^{-1} \mathbf{q}^e \quad (1.6.3)$$

Le champ de déplacements, en tout point de l'élément, peut s'exprimer en fonction des degrés de liberté nodaux \mathbf{q}^e :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{U}\{\mathbf{U}^e\}^{-1} \mathbf{q}^e = \mathbf{N}\mathbf{q}^e \quad (1.6.4)$$

Le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ peut s'écrire alors en fonction des degrés de liberté nodaux \mathbf{q}^e :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}^e \quad (1.6.5)$$

où \mathbf{B} est la matrice élémentaire qui relie les déformations aux déplacements définie comme suit : $2\mu \left[\frac{\partial \mathbf{U}_x}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{U}_y}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{U}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{U}_y}{\partial x} \right]$.

Finalement, la matrice de rigidité de l'élément perforé semi-analytique s'exprime suivant l'Équation (1.6.6).

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| t \, d\Omega \quad (1.6.6)$$

où \mathbf{D} est le tenseur d'élasticité, \mathbf{J} est la matrice jacobienne de la transformation considérée (coordonnées cartésiennes-polaires), $|\mathbf{J}|$ est le déterminant de la matrice jacobienne (i.e., le jacobien), et t est l'épaisseur de l'élément.

1.7 Synthèse

Différentes méthodes numériques existantes pour la modélisation des discontinuités ont, dans un premier temps, été présentées. La pertinence de chacune de ces méthodes par rapport à la problématique posée a été évaluée selon plusieurs critères essentiels. Sa capacité à localiser les champs mécaniques au voisinage de la perforation, son adaptation aux calculs de structures (e.g., son efficacité d'un point de vue temps de calcul), et sa capacité à représenter l'assemblage riveté (i.e., sa capacité à modéliser l'interaction entre le rivet et la perforation) ont été analysées en particulier. Il a été mis en évidence qu'aucune de ces méthodes ne répond complètement à la problématique, et qu'une modélisation de la tôle perforée par des super-éléments finis est particulièrement adaptée.

Une liste non exhaustive de méthodes de décomposition de domaine a, ensuite, été proposée. Parmi elles, une méthode faisant intervenir une interface de déplacements indépendante qui emploie les multiplicateurs de Lagrange s'avère particulièrement adaptée pour la construction de super-éléments finis. En effet, cette méthode est la plus commode pour formuler des super-éléments comportant des discontinuités, notamment dans un contexte implicite, puisqu'elles permettent le couplage du super-élément avec d'autres éléments *via* cette interface (i.e., la continuité des déplacements au travers de cette interface). Dans un contexte dynamique, les méthodes de type Mortar ou Arlequin sembleraient plus adaptées puisque ces méthodes permettent de gérer la propagation des ondes aux interfaces entre sous-domaines, ce qui éviterait ainsi les réflexions d'ondes et le piège de l'énergie dans le super-élément.

Dans un troisième temps, une présentation des différents principes variationnels de la littérature permettant la formulation d'éléments finis a été proposée. Il a été mis en évidence que différents types de principes, et donc d'éléments, pouvaient être formulés selon les équations affaiblies et les champs interpolés choisis. Les principes de la famille hybride ont, en particulier, été étudiés puisqu'ils permettent le collage de sous-domaines, en introduisant un ou plusieurs champs d'interface interpolés indépendamment du ou des champs d'intérieur de domaine. En particulier, il a été mis en évidence que les principes de type hybride-déplacement sont particulièrement intéressants pour la formulation de super-éléments finis car la continuité des déplacements est alors assurée entre le super-élément et les éléments finis classiques voisins. Nous nous sommes également intéressés à un principe hybride particulier appelé principe hybride-Trefftz qui repose sur des fonctions d'interpolation qui satisfont *a priori* les équations d'intérieur de domaine. L'avantage est qu'un système ne nécessitant que des intégrations aux frontières et pas d'intégrations d'intérieur de domaine est alors formulé, ce qui est intéressant pour développer un super-élément qui comporte une discontinuité.

Une étude bibliographique de super-éléments existants dans la littérature pour la modélisation de discontinuités géométriques ou matérielles a, ensuite, été proposée. L'analyse a mis en évidence que la méthode des variables complexes est la plus adaptée pour calculer les fonctions d'interpolation d'un super-élément comportant une discontinuité. Avec cette méthode, les champs de contraintes et/ou de déplacements au voisinage de la discontinuité sont évalués avec précision puisqu'ils reposent sur une solution analytique. De plus, il est conclut que les principes de la classe hybride, qui sont généralement employés, sont les plus appropriés pour la formulation de super-éléments. Les super-éléments finis ainsi formulés sont, par conséquent, compatibles avec les EFs classiques, ce qui facilite leur intégration dans un code de calculs EF standard.

Enfin, deux super-éléments particulièrement intéressants pour modéliser des discontinuités géométriques ont été présentés en détail. Le premier, formulé par Leconte *et al.* [10], a montré son efficacité et sa précision pour la prédiction des champs de contraintes et de déplacements au voisinage d'une perforation circulaire quel que soit le chargement appliqué. Le second, formulé par Soh *et al.* [60–62], a la particularité de posséder des fonctions d'interpolation exprimées en fonction de degrés de liberté physiques relatifs aux positions nodales du super-élément. Comme nous le verrons par la suite, les développements proposés dans cette thèse seront basés sur la formulation du super-élément de Leconte *et al.* ainsi que sur la technique utilisée par Soh *et al.*

La modélisation des discontinuités par super-éléments semble particulièrement adaptée pour répondre à la problématique posée. De plus, la précision des résultats obtenus avec le super-élément perforé proposé par Leconte *et al.*, en termes de localisation des contraintes et des déplacements, ainsi que son efficacité nous incitent à étendre la formulation de manière à ce que la modélisation de l'interaction avec un macro-modèle de rivet soit rendue possible. Pour cela, la formulation d'un super-élément perforé qui comporte des nœuds situés sur la perforation est donc proposée dans le Chapitre 2. Les fonctions d'interpolation du nouveau super-élément sont, ensuite, analysées dans le Chapitre 3. Finalement, le super-élément avec nœuds internes formulé est implémenté dans le code de calcul EF ZéBuLoN, et est évalué pour des chargements externes et internes dans le Chapitre 4.

Chapitre 2

Formulation d'un nouveau super-élément perforé avec des nœuds sur la perforation

La formulation d'un super-élément perforé qui comporte des nœuds sur la perforation fait l'objet de ce chapitre. Ces nouveaux nœuds sont formulés afin de pouvoir établir une interaction avec un macro-élément utilisé pour le rivet, et ainsi permettre la modélisation d'un assemblage riveté adapté aux calculs des structures. Le principe variationnel de ce nouveau super-élément perforé est tout d'abord formulé. Les fonctions d'interpolation sont déterminées grâce au formalisme de la méthode des variables complexes, et sont choisies de façon à développer un super-élément perforé qui comporte 8 nœuds externes et 8 nœuds sur la perforation. Le principe variationnel est modifié de façon à prendre en compte la continuité des déplacements uniquement sur la frontière externe du super-élément. Enfin, la matrice de rigidité et le vecteur chargement du nouveau super-élément perforé sont établis en réécrivant les conditions de stationnarité du principe de manière à conserver tous les degrés de liberté, en particulier ceux des nœuds internes, dans le système linéaire final $Kq = f$.

Dans ce chapitre, des solutions particulières permettant de considérer des chargements plus généraux appliqués à la perforation du super-élément, que ceux utilisés jusqu'à présent, ont également été mises en évidence. Grâce à ce formalisme et à la gestion du contact rendue possible par la formulation des nœuds sur la perforation, l'interaction entre le modèle de plaque perforée et un macro-élément rivet peut alors être établie. Il est, de plus, montré que la formulation proposée est une généralisation du super-élément perforé à 8 nœuds qui ne comporte pas de nœuds internes.

Table des matières

2.1	Introduction	56
2.2	Formulation du principe variationnel	56
2.3	Définition des champs d'intérieur de domaine et du champ inter-éléments	59
2.4	Calcul des fonctions d'interpolation en termes de degrés de liberté physiques	67
2.5	Construction de la matrice de rigidité et du vecteur chargement du super-élément perforé avec nœuds sur la perforation	69
2.6	Synthèse	73

2.1 Introduction

La littérature a mis en évidence l'existence d'un super-élément perforé, formulé pour modéliser les tôles perforées des assemblages rivetés dans les calculs de structures. Ce super-élément repose sur la formulation d'un principe variationnel et des fonctions d'interpolation spéciales qui permettent de prendre en compte la perforation. Cet élément permet de localiser les champs mécaniques autour de la perforation avec précision et très peu de degrés de liberté lorsque des chargements externes sont considérés. Cependant, la frontière interne du super-élément, qui représente le contour de la perforation, est une frontière analytique qui est libre de chargement. Par conséquent, il est impossible de modéliser l'interaction entre ce modèle de plaque perforée et un macro-élément rivet.

Il est donc proposé de développer un super-élément perforé qui comporte des nœuds sur la perforation afin de pouvoir établir une interaction entre la fixation et la perforation *via* ces nouveaux nœuds. Dans un premier temps, le principe variationnel associé au nouveau super-élément perforé est formulé de manière à prendre en compte la compatibilité de l'élément avec les éléments finis classiques voisins. Dans un deuxième temps, le champ inter-éléments, i.e. à l'interface entre le super-élément et les EFs voisins, ainsi que les champs de contraintes et de déplacements à l'intérieur de l'élément sont définis et introduits dans le principe variationnel. Les fonctions d'interpolation de l'élément sont alors déterminées et les champs d'intérieur de domaine sont établis pour des efforts qui transitent soit par la frontière externe du super-élément, soit par la frontière interne, i.e. la perforation. Dans un troisième temps, les fonctions d'interpolation du super-élément sont exprimées en fonction de degrés de liberté physiques, et non plus généralisés comme c'était le cas pour le super-élément perforé à 8 nœuds, afin de fixer la position des nœuds sur la perforation. Finalement, la matrice de rigidité et le vecteur chargement du nouveau super-élément perforé sont formulés.

2.2 Formulation du principe variationnel

Le principe variationnel du super-élément perforé avec nœuds sur la perforation est sélectionné parmi les principes variationnels de type hybride [37, 38, 43, 91] de façon à permettre la compatibilité du super-élément avec les EFs classiques voisins. Un principe variationnel de type hybride-Trefftz déplacement, donné par l'Équation (2.2.1), est choisi pour le développement du principe du nouveau super-élément perforé. Ce principe constitue un des fondements de la formulation du super-élément perforé sans nœuds internes (Section 1.5.1), dont la particularité est qu'il permet de réduire les intégrations d'intérieur

de domaine à des intégrations aux frontières uniquement.

$$\Pi_{\text{HT-D}}(u_i, T_i, \tilde{u}_i) = \frac{1}{2} \int_S T_i u_i \, dS - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i \, dS + \int_{S_u \cup S_i} (\tilde{u}_i - u_i) T_i \, dS \quad (2.2.1)$$

où les frontières S_u et S_t correspondent aux frontières où sont imposés des déplacements ou des efforts, respectivement, et la frontière S_i est la frontière inter-éléments. La frontière du super-élément, notée S , correspond à l'union disjointe des trois frontières mentionnées telle que $S = S_u \cup S_t \cup S_i$. Notons que la frontière S est ici constituée de l'union de la frontière externe du super-élément et du contour de la perforation, contrairement au super-élément perforé sans nœuds internes où S n'est constituée que de la frontière externe du super-élément (cf. Section 1.5.1).

Posons $\Pi_{\text{HT-D}}(u_i, T_i, \tilde{u}_i) = \Pi(u_i, T_i) + \pi_{\text{H}}(u_i, T_i, \tilde{u}_i)$, avec :

$$\Pi(u_i, T_i) = \frac{1}{2} \int_S T_i u_i \, dS - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i \, dS \quad (2.2.2)$$

$$\pi_{\text{H}}(u_i, T_i, \tilde{u}_i) = \int_{S_u \cup S_i} (\tilde{u}_i - u_i) T_i \, dS \quad (2.2.3)$$

Dans la première étape, le champ de déplacements \mathbf{u} et le vecteur traction \mathbf{T} de l'Équation (2.2.1) sont décomposés en la somme d'une partie homogène et d'une partie particulière, respectivement notées \mathbf{u}^h , \mathbf{T}^h , et \mathbf{u}^p , \mathbf{T}^p :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^h + \mathbf{u}^p \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^h + \mathbf{T}^p \quad (2.2.4)$$

La partie homogène correspond à la solution d'une plaque perforée dont la perforation est libre de chargement ; cette solution dépend de paramètres variables. La partie particulière correspond à un chargement particulier appliqué sur le contour de la perforation. Cette dernière est une solution analytique qui ne dépend pas de paramètre.

En introduisant, tout d'abord, la décomposition de \mathbf{u} et \mathbf{T} donnée par les Équations (2.2.4) dans la potentielle π_{H} associée à la compatibilité du super-élément avec les EFs classiques (Équation (2.2.3)), on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_{\text{H}} = & \int_{S_i} \tilde{u}_i T_i^h \, dS + \int_{S_i} \tilde{u}_i T_i^p \, dS - \int_{S_i} u_i^h T_i^h \, dS - \int_{S_i} u_i^h T_i^p \, dS - \int_{S_i} u_i^p T_i^h \, dS \\ & + \text{termes sans } u_i^h, T_i^h, \tilde{u}_i \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

De la même manière, en introduisant les expressions (2.2.4) dans la potentielle Π de l'Équation (2.2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_S T_i^h u_i^h \, dS + \frac{1}{2} \int_S T_i^h u_i^p \, dS + \frac{1}{2} \int_S T_i^p u_i^h \, dS - \int_{S_t} \hat{T}_i u_i^h \, dS \\ & + \text{termes sans } u_i^h, T_i^h \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

À cette étape de la formulation du principe, Leconte a supposé que les termes $\int_S T_i^h u_i^p dS$ et $\int_S T_i^p u_i^h dS$ étaient égaux. En fait, selon Leconte [9], l'expression du principe proposé par Piltner est retrouvée à condition que $\int_S T_i^h u_i^p dS = \int_S T_i^p u_i^h dS$. Cette hypothèse, faite par Piltner de manière implicite, n'est expliquée dans aucun des articles de référence de l'auteur [50, 93]. Cependant, il n'est pas trivial que cette égalité soit vraie *a priori* quelle que soit la solution particulière $(\mathbf{u}^p, \mathbf{T}^p)$ considérée, i.e. quel que soit le chargement analytique appliqué sur la perforation. En conséquence, il est donc choisi de ne pas considérer dans ces travaux cette simplification et donc de conserver les deux termes dans le principe (Équation (2.2.6)).

Dans la seconde étape, la frontière S est décomposée de la façon suivante : $S = S_t \cup S_u \cup S_i$. En introduisant cette décomposition dans l'Équation (2.2.6) et en appliquant les conditions aux limites décrites par l'Équation (2.2.7), on obtient l'expression du principe donnée par l'Équation (2.2.8).

$$\begin{cases} 0 &= u_i^h & \text{sur } S_u \\ \widehat{u}_i &= u_i^p & \text{sur } S_u \\ 0 &= T_i^h & \text{sur } S_t \\ \widehat{T}_i &= T_i^p & \text{sur } S_t \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Les conditions aux limites de l'Équation (2.2.7) sont volontairement écrites de manière inversée par rapport à Piltner [50]. De cette manière, il est mis en évidence que les conditions aux limites du problème EF ne peuvent être quelconques. En effet, les champs \widehat{u}_i et \widehat{T}_i doivent s'écrire comme la *restriction* d'un champ analytique sur les frontières S_u et S_t .

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_{S_i} T_i^h u_i^h dS + \frac{1}{2} \int_{S_i} T_i^h u_i^p dS + \frac{1}{2} \int_{S_u} T_i^h u_i^p dS + \frac{1}{2} \int_{S_i} T_i^p u_i^h dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{S_t} T_i^p u_i^h dS + \text{termes sans } u_i^h, T_i^h \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Par conséquent, en combinant l'expression de la potentielle π_H (Équation (2.2.5)) à celle de la potentielle Π (Équation (2.2.8)), le principe hybride-Trefftz déplacement devient :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{HT-D}} &= -\frac{1}{2} \int_{S_i} T_i^h u_i^h dS - \frac{1}{2} \int_{S_i} T_i^h u_i^p dS - \frac{1}{2} \int_{S_i} T_i^p u_i^h dS - \frac{1}{2} \int_{S_t} T_i^p u_i^h dS \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{S_u} T_i^h u_i^p dS + \int_{S_i} \widetilde{u}_i T_i^h dS + \int_{S_i} \widetilde{u}_i T_i^p dS \\ &\quad + \text{termes sans } u_i^h, T_i^h, \widetilde{u}_i \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

À cette étape du développement, le super-élément est supposé être complètement entouré d'éléments finis conventionnels. Ainsi, la frontière inter-éléments notée S_i est associée

à la frontière externe du super-élément (Figure 2.1). De plus, on suppose que le contour de la perforation est une frontière où des chargements sont appliqués. Autrement dit, S_t correspond exclusivement au contour de la perforation. Ce constat est en fait une conséquence implicite des conditions aux limites introduites par l'Équation (2.2.7). La frontière S_t sera donc notée S_p dans la suite des développements, où l'indice p fait référence à la perforation.

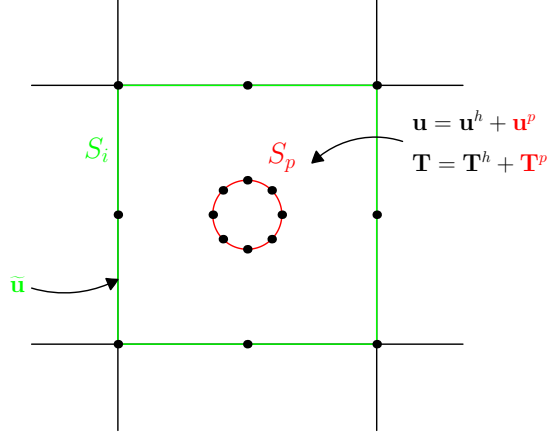


FIGURE 2.1 – Nature des frontières du super-élément perforé avec nœuds internes.

2.3 Définition des champs d'intérieur de domaine et du champ inter-éléments

Le principe variationnel du super-élément avec nœuds sur la perforation est maintenant développé. Les champs qui composent ce principe doivent alors être explicités. Pour cela, les expressions du champ de déplacements inter-éléments, de la solution homogène, et de la solution particulière sont définies dans cette partie.

2.3.1 Expression du champ de déplacements inter-éléments

Le super-élément est supposé être complètement entouré d'EFs conventionnels (Section 2.2). Il est choisi de le rendre compatible avec des éléments finis quadratiques le long de sa frontière externe. De manière analogue au super-élément perforé à 8 nœuds [10], le champ de déplacements inter-éléments $\tilde{\mathbf{u}}$ est défini comme une fonction des ddl nœdaux associés à la frontière externe du super-élément qui sont notés $\tilde{\mathbf{q}}_{ext}$. Ce champ est donc défini par la relation (2.3.1).

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{q}}_{ext} \quad (2.3.1)$$

où la matrice $\tilde{\mathbf{N}}$ est la matrice des fonctions d'interpolation associées aux éléments finis voisins polynomiaux d'ordre 2, et dont l'expression est donnée par l'Équation (2.3.2).

$$\tilde{\mathbf{u}}_{|[p,p+2]} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{V}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ u_{p+1} \\ u_{p+2} \\ v_p \\ v_{p+1} \\ v_{p+2} \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

$$\text{avec } \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{s}{l}\right) \left(1 - 2\frac{s}{l}\right) & 4\frac{s}{l} \left(1 - \frac{s}{l}\right) & \frac{s}{l} \left(2\frac{s}{l} - 1\right) \end{pmatrix}$$

où (u_p, v_p) est la valeur de $\tilde{\mathbf{u}}$ au nœud p , s est l'abscisse curvilinéaire mesurée à partir du point p , et l correspond à la distance entre les nœuds p et $p + 2$.

2.3.2 Détermination de la solution homogène et choix des fonctions d'interpolation

La solution homogène $(\mathbf{u}^h, \mathbf{T}^h)$ correspond à la solution analytique de la plaque perforée dont la perforation est libre de chargement. La détermination de cette solution est basée sur le même formalisme que le super-élément perforé à 8 nœuds, c'est-à-dire la méthode des variables complexes de Kolosov-Muskhelishvili [49]. Ce formalisme permet, en effet, de construire des fonctions d'interpolation qui sont capables de prendre en compte l'influence d'un défaut (perforation circulaire, elliptique, fissure, etc.) sur les champs de contraintes et de déplacements (Section 1.5.2). L'expression de la solution homogène $(\mathbf{u}^h, \mathbf{T}^h)$ pour le cas d'une perforation circulaire est donnée par les Équations (1.5.12)-(1.5.16). Elle s'écrit sous la forme d'une série de Laurent où chaque terme de la série est le produit d'un mode de déformation et d'un coefficient. Ces coefficients, notés (α_j, β_j) , sont appelés les degrés de liberté *généralisés* du super-élément (Équation (2.3.3)). De plus, il a été montré que les bornes des séries, N et M , apparaissant dans l'expression de \mathbf{u}^h et \mathbf{T}^h (Équations (1.5.12)-(1.5.16)) sont fixées en fonction du nombre de nœuds du super-élément (Section 1.5.3). Par conséquent, le nombre de nœuds du super-élément avec nœuds internes doit être fixé.

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N}\mathbf{c} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}^h = \mathbf{P}\mathbf{c} \quad (2.3.3)$$

où \mathbf{c} est le vecteur des degrés de liberté généralisés du super-élément (α_j, β_j) , et \mathbf{N} et \mathbf{P} sont les matrices des fonctions d'interpolation associées aux champs de déplacements et aux champs de contraintes, respectivement.

Il est proposé de formuler un super-élément perforé qui comporte 8 nœuds sur sa frontière externe et 8 nœuds sur sa frontière interne (i.e., la perforation), comme illustré par

la Figure 2.2. Ce choix est motivé par le fait que le meilleur compromis entre précision et efficacité doit être recherché. En effet, le super-élément perforé est destiné à être utilisé pour la modélisation des assemblages rivetés en calculs de structures. Par conséquent, l'interaction entre la fixation et la perforation du super-élément doit être représentative des efforts échangés, d'une part, et le nombre de degrés de liberté doit être limité, d'autre part.

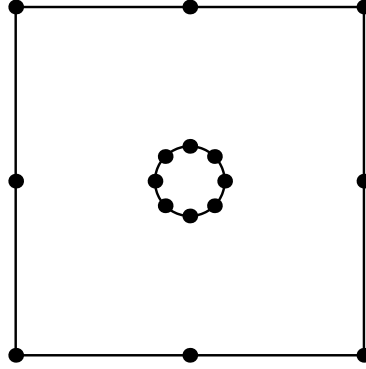


FIGURE 2.2 – Super-élément perforé à 16 nœuds avec 8 nœuds sur la perforation.

La littérature [50,93] montre que la formulation d'un super-élément à 16 nœuds (situés sur la frontière externe) requiert des fonctions d'interpolation tronquées à l'ordre $N = M = 8$ (cf. Section 1.5.3). Par conséquent, les bornes des séries pour les fonctions d'interpolation du super-élément perforé à 8 nœuds externes et 8 nœuds internes sont fixées à $N = M = 8$. En fait, la position des nœuds n'influe pas sur le calcul de N et M , seul le nombre de nœuds compte. La précision des fonctions d'interpolation calculées à l'ordre $N = M = 8$ sera évaluée dans le Chapitre 3.

2.3.3 Analyse de solutions particulières de la littérature

Afin de considérer des chargements appliqués sur le contour de la perforation du super-élément perforé, il est nécessaire de considérer une solution analytique dite « particulière ». Cette solution donne les champs \mathbf{u}^p et $\boldsymbol{\sigma}^p$ à l'intérieur du super-élément sous l'action d'un chargement appliqué à la perforation. Dans la littérature, il existe différentes solutions particulières.

Il est important de noter que parmi les solutions particulières analysées dans cette section, uniquement celle correspondant à la pression constante uniformément répartie a été évoquée dans le cadre de la formulation de super-éléments. Les autres exemples évoqués, notamment la solution particulière qui correspond à des forces ponctuelles appliquées sur le contour de la perforation, n'ont jamais été associées à des travaux de recherche concernant la formulation de super-éléments. De plus, aucune des trois solutions n'a été

concrètement utilisée dans la pratique pour appliquer un chargement particulier à la perforation d'un super-élément perforé.

Une solution particulière intéressante est la solution d'une plaque perforée dont le contour de la perforation est soumis à une pression constante de valeur P appliquée de manière uniforme. La solution $(\mathbf{u}^p, \boldsymbol{\sigma}^p)$ correspondante est rappelée ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x^p(R, \theta, P) = \frac{1}{2\mu} P r_0 R^{-1} \cos \theta \\ u_y^p(R, \theta, P) = \frac{1}{2\mu} P r_0 R^{-1} \sin \theta \\ \sigma_{xx}^p(R, \theta, P) = -P R^{-2} \cos(2\theta) \\ \sigma_{yy}^p(R, \theta, P) = P R^{-2} \cos(2\theta) \\ \sigma_{xy}^p(R, \theta, P) = -P R^{-2} \sin(2\theta) \end{array} \right. \quad (2.3.4)$$

Évidemment, cette solution n'est pas représentative des efforts qui peuvent se produire dans un assemblage riveté entre le rivet et la plaque perforée. Cependant, son expression très simple présente un grand intérêt pour valider le formalisme qui est proposé (facilité d'implémentation). En effet, la seule connaissance du rayon de la perforation, du module de cisaillement du matériau, et de la pression appliquée sur le contour de la perforation permet de calculer les champs de contraintes et de déplacements dans la plaque sous l'action de cet effort. Ainsi, le développement proposé du super-élément perforé avec nœuds internes pourra être validé, en première approche, en appliquant une pression constante uniformément répartie (Équation (2.3.4)) sur le contour de la perforation du super-élément.

Maintenant, pour être plus représentatif et pouvoir modéliser par exemple le déplacement de la fixation dans le plan de la plaque perforée (i.e, pouvoir représenter le matage), d'autres solutions beaucoup plus adaptées, mais plus compliquées, existent. En effet, la littérature montre qu'il est possible de calculer la solution analytique d'une plaque perforée lorsque la perforation est soumise à un nombre quelconque de forces concentrées F_r appliquées aux points $z = z_r$ du contour de la perforation dans le plan complexe [98, 99], comme illustré sur le schéma de la Figure 2.3. L'expression de la solution particulière est rappelée par l'Équation (2.3.5).

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x^p(z, F_r, z_r) = \frac{1}{2\mu} \Re \left\{ k \Phi(z) - z \overline{\Phi'(z)} - \overline{\chi'(z)} \right\} \\ u_y^p(z, F_r, z_r) = \frac{1}{2\mu} \Im \left\{ k \Phi(z) - z \overline{\Phi'(z)} - \overline{\chi'(z)} \right\} \\ \sigma_{xx}^p(z, F_r, z_r) = \Re \{ 2\Phi'(z) - \bar{z} \Phi''(z) - \chi''(z) \} \\ \sigma_{yy}^p(z, F_r, z_r) = \Re \{ 2\Phi'(z) + \bar{z} \Phi''(z) + \chi''(z) \} \\ \sigma_{xy}^p(z, F_r, z_r) = \Im \{ \bar{z} \Phi''(z) + \chi''(z) \} \end{array} \right. \quad (2.3.5)$$

où les fonctions Φ et χ sont définies par les Équations (2.3.6) et (2.3.7), respectivement.

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi} \sum F_r \log \left(\frac{z - z_r}{r_0} \right) + \frac{k \log(z/r_0)}{2\pi(k+1)} \sum F_r \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned} \chi(z) = & \frac{1}{2\pi} \sum (F_r \bar{z}_r - \bar{F}_r z_r) \log \left(\frac{z - z_r}{r_0} \right) + \frac{z}{2\pi} \sum \bar{F}_r \log \left(\frac{z - z_r}{r_0} \right) \\ & - \frac{z \log(z/r_0)}{2\pi(k+1)} \sum \bar{F}_r - \frac{\log(z/r_0)}{2\pi} \sum F_r \bar{z}_r + \frac{r_0^2 k}{2\pi(k+1)z} \sum F_r \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

La complexité de cette solution vient non seulement de son expression elle-même, mais surtout de la présence du logarithme complexe qui est une fonction dite multi-valuée (cf. Annexe C).

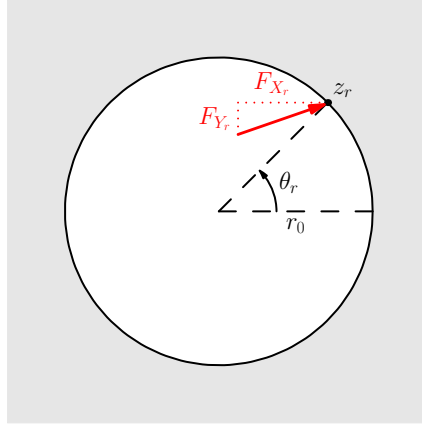


FIGURE 2.3 – Schéma d'une force concentrée $F = F_{X_r} + iF_{Y_r}$ appliquée au point $z = z_r$ du contour de la perforation.

Cette solution est particulièrement intéressante et pertinente, pour modéliser l'interaction rivet/plaque perforée, puisqu'elle permettrait de considérer des chargements quelconques appliqués aux nœuds de la perforation du super-élément. La gestion de l'interaction avec un macro-élément rivet est envisagée *via* des forces de contact entre : (1) les nœuds de la perforation du super-élément de plaque perforée et, (2) une surface analytique cylindrique figurative du fût du rivet qui est attachée aux nœuds du macro-élément 1D. Des méthodes de contact classiques, de type multiplicateurs de Lagrange ou pénalité, ou d'autres méthodes comme la méthode de flexibilité¹, pourraient alors être envisagées dans le but d'évaluer ces forces de contact. Après avoir déterminé les forces nodales appliquées par le rivet sur la perforation, et *vice versa*, les champs de contraintes et de déplacements $(\mathbf{u}^p, \mathbf{T}^p)$ sous l'influence de ces forces pourraient alors être calculés en temps réel, i.e. à chaque pas de temps du calcul, grâce à l'introduction de la solution particulière des Équations (2.3.5)-(2.3.7) dans la formulation du super-élément. Notons que, grâce au calcul des

1. La méthode de flexibilité est employée dans le code de calculs ZéBuLoN pour la gestion du contact. Elle apparaît bien adaptée, car les forces de contact sont calculées *a priori* contrairement aux méthodes de type multiplicateurs de Lagrange ou pénalité où les forces de contact sont évaluées en même temps que les déplacements nodaux.

forces de contact aux nœuds de la perforation du super-élément, les pressions appliquées au voisinage de chacun de ces nœuds pourraient être évaluées. L'influence de ces forces de pression appliquées sur des petites sections du contour de la perforation² sur les champs mécaniques pourrait alors être prise en compte par la solution particulière présentée dans la Section 1.5.4 (Équations (1.5.11), (1.5.21) et (1.5.22)). Dans tous les cas, grâce à la gestion du contact rendue possible *via* les nœuds formulés sur la perforation du super-élément, un dialogue permanent, une interaction, pourra être établie entre le modèle de la fixation et le modèle de la plaque perforée.

2.3.4 Introduction des champs d'intérieur de domaine et du champ inter-éléments dans le principe variationnel

Maintenant que les termes intervenant dans le principe sont explicités, les expressions (2.3.1) et (2.3.3) sont introduites dans le principe variationnel de l'Équation (2.2.9). Ce dernier, $\Pi_{\text{HT-D}}$, peut finalement être réécrit sous une forme matricielle de la façon suivante :

$$\Pi_{\text{HT-D}}(\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{q}}_{\text{ext}}) = -\frac{1}{2}\mathbf{c}^t \mathcal{H} \mathbf{c} + \mathbf{c}^t \mathcal{L} \tilde{\mathbf{q}}_{\text{ext}} - \mathbf{c}^t \mathcal{R}^c + \tilde{\mathbf{q}}_{\text{ext}}^t \mathcal{R}^d + \text{termes sans } \mathbf{c}, \tilde{\mathbf{q}}_{\text{ext}} \quad (2.3.8)$$

où les matrices \mathcal{H} , \mathcal{L} , et les vecteurs \mathcal{R}^c , \mathcal{R}^d sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ij} &= \int_{S_i} P_{ki} N_{kj} \, dS \\ \mathcal{L}_{ij} &= \int_{S_i} P_{ki} \tilde{N}_{kj} \, dS \\ \mathcal{R}_i^c &= \frac{1}{2} \left[\int_{S_p} N_{ki} T_k^p \, dS + \int_{S_i} P_{ki} u_k^p \, dS + \int_{S_i} N_{ki} T_k^p \, dS \right] \\ \mathcal{R}_i^d &= \int_{S_i} \tilde{N}_{ki} T_k^p \, dS \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

La matrice de rigidité et le vecteur chargement du super-élément perforé avec nœuds sur la perforation peuvent maintenant être construits en minimisant le principe variationnel obtenu. Cependant, la minimisation du principe de l'Équation (2.3.8) par rapport au vecteur \mathbf{c} , puis au vecteur $\tilde{\mathbf{q}}_{\text{ext}}$ mène à un système linéaire du type $\mathbf{K} \tilde{\mathbf{q}}_{\text{ext}} = \mathbf{f}$; expression dans laquelle les degrés de liberté associés à la frontière interne du super-élément (i.e., la perforation) n'interviennent pas. Cette situation était, en fait, prévisible puisque le même résultat est obtenu pour la formulation de la matrice de rigidité du super-élément perforé

2. Typiquement, le contour de la perforation peut être découpé en 8 sections, chacune étant associée à un nœud. Autrement dit, chaque section est définie par $\left\{ \theta \in \left[(2k-1)\frac{\pi}{8}; (2k+1)\frac{\pi}{8} \right] ; k = \{0, \dots, 7\} \right\}$.

à 8 nœuds [10]. Le vecteur de ddls généralisés étant condensé, seuls les ddls physiques, qui sont relatifs à la compatibilité le long de la frontière externe, sont conservés dans le système final (Section (1.5.1)). Ainsi, ce qui présentait un intérêt pour le super-élément perforé sans nœuds internes, devient un obstacle au développement du super-élément perforé comportant des nœuds sur la perforation. En conclusion, l'augmentation du nombre de ddls ne suffit donc pas à formuler un EF qui comporte des nœuds supplémentaires sur la frontière interne (Section 2.3.2).

Or, il est fondamental ici de conserver les ddls associés à la frontière interne dans la formulation du principe et dans la matrice de rigidité du super-élément perforé à nœuds internes. Il est proposé d'analyser la formulation de super-éléments de la littérature.

Un super-élément polygonal qui comporte une inclusion polygonale est étudié. Ce super-élément, présenté dans la Section 1.4.2, a été développé par Cesari *et al.* [81–84] dans le but d'étudier le comportement mécanique des matériaux hétérogènes (matrice comportant des inclusions). Cet élément a la particularité de posséder des nœuds sur la frontière interne de l'élément qui matérialise l'interface matrice/inclusion, comme le montre la Figure 1.16. Tous les ddls internes et externes interviennent dans le système final $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$ de cet élément. Cela est dû au fait que les déplacements autour de la frontière interne de l'élément polygonal sont égaux aux déplacements autour de la frontière de l'inclusion. Cette condition se ramène finalement au respect de la continuité des déplacements au niveau de l'interface entre la matrice et l'inclusion³. Grâce à cette condition, la position des nœuds externes et internes est fixée et tous les ddls sont conservés dans le système final.

En comparant cette formulation à celle du super-élément perforé avec nœuds sur la perforation, il semble que la compatibilité autour de la frontière interne soit une condition nécessaire pour conserver les ddls, et donc les nœuds, de la perforation. Or, la frontière interne du super-élément perforé à nœuds internes est une frontière où des chargements, nodaux en particulier, peuvent être appliqués. Imposer la compatibilité le long de la perforation pourrait donc avoir plusieurs conséquences :

- tout d'abord, l'écartement progressif de la fixation et de la perforation, lorsque que l'assemblage riveté est en situation de matage par exemple, semblerait impossible à modéliser si le déplacement de la fixation égale celui du contour de la perforation du super-élément ;

3. Notons que l'expression du champ de déplacements le long de l'interface matrice/inclusion est ici triviale car cette frontière est linéaire par morceaux (inclusion polygonale).

- ensuite, l'élément ainsi formulé contiendrait une inclusion rigide⁴ et non un trou. En effet, d'autres auteurs [51, 75, 84] ont formulé un super-élément (sans nœuds internes) qui comporte soit une perforation soit une inclusion rigide. La seule différence entre ces deux éléments repose sur le fait que la compatibilité des déplacements est imposée sur la frontière interne dans le cas de l'inclusion, et pas dans le cas de la perforation. Cette différence se traduit dans le principe variationnel par une différence de signe d'un des termes du principe ; les autres termes étant identiques entre l'élément perforé et l'élément avec inclusion rigide.

En résumé, si la compatibilité des déplacements est imposée à la fois sur la frontière interne et sur la frontière externe du super-élément, tous les ddls externes et internes peuvent être conservés dans le système linéaire final, mais dans ce cas le super-élément formulé contient une inclusion rigide et non un trou.

Un autre super-élément perforé (sans nœuds internes) basé sur le principe Π_{TPE} (Équation (1.5.1)) et dont les deux frontières sont incompatibles, a été formulé par Soh *et al.* [60–62]. Cet élément a été présenté dans les Sections 1.4.1 et 1.6. Pour construire la matrice de rigidité du super-élément, les auteurs proposent de réécrire les déplacements en fonction de ddls physiques et non plus généralisés. De cette manière, non seulement la position des nœuds du super-élément est fixée, mais en plus les ddls sont conservés dans la formulation, et ce, même si les déplacements ne sont pas compatibles le long des frontières externe et interne de l'élément. Néanmoins, imposer la compatibilité des déplacements à travers la frontière externe du super-élément est un pré-requis de la Méthode des Éléments Finis (au moins la continuité \mathcal{C}^0 du champ de déplacements entre les éléments).

En conclusion, l'analyse de super-éléments de la littérature met en évidence le fait que pour conserver les ddls de la frontière interne du super-élément perforé dans le système linéaire final $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$, la compatibilité des déplacements doit être assurée, soit sur les deux frontières de l'élément, soit sur aucune. Cependant, aucune des deux solutions n'est appropriée à notre problématique, que ce soit du point de vue de la représentativité de l'assemblage ou du point de vue de la théorie. Le super-élément perforé à nœuds internes, visé ici, repose sur une formulation intermédiaire où seule la compatibilité le long de la frontière externe est requise. Dans ce cas, la position des nœuds externes du super-élément perforé est fixée, mais la position des nœuds de la perforation n'est en revanche pas définie dans la formulation proposée. Or, la littérature montre que les ddls peuvent être conservés dans le système, lorsque les frontières ne sont pas compatibles, en réécrivant les déplacements en fonction de ddls physiques. Par conséquent, il est proposé

4. Il est précisé inclusion *rigide* car une inclusion *élastique* ne pourrait pas être considérée dans le super-élément rien qu'en imposant la compatibilité des déplacements sur la frontière interne. En effet, le principe variationnel du super-élément perforé proposé est défini à partir d'une seule potentielle (Équation (2.2.1)), contrairement à ce qui est fait dans les travaux de Cesari *et al.*, et seul le comportement d'un matériau est pris en compte dans la formulation.

d'exprimer les fonctions d'interpolation associées au super-élément perforé en termes de ddls physiques, non seulement pour fixer la position des nœuds internes, mais aussi afin de pouvoir distinguer les ddls externes des ddls internes dans la formulation.

2.4 Calcul des fonctions d'interpolation en termes de degrés de liberté physiques

Comme présenté dans la section précédente, les ddls généralisés sont généralement condensés en prenant les conditions de stationnarité du principe dans le processus de formulation des super-éléments. Seuls les ddls physiques du principe qui sont associés à la compatibilité des déplacements inter-éléments, i.e. ceux associés aux nœuds externes, sont conservés. Afin de conserver les ddls internes dans la formulation et fixer la position des nœuds de la perforation, les fonctions d'interpolation du super-élément sont réécrites en fonction de ddls physiques et non plus généralisés. Ce nouveau formalisme est proposé ci-après.

Les ddls généralisés sont des coefficients, qui ne sont donc pas localisés en des positions particulières contrairement aux ddls physiques, qui réfèrent quant à eux à des positions nodales d'un EF. Afin de formuler des nœuds dans le super-élément en des positions particulières choisies, il est proposé de réécrire les fonctions d'interpolation du super-élément perforé à la manière de Soh *et al.* [60–62], i.e. telle que les champs de contraintes et de déplacements soient exprimés en termes de ddls physiques. L'expression du champ de déplacements homogène \mathbf{u}^h étant valide en tous points (Équation (2.3.3)), elle peut être réécrite, par conséquent, en des positions choisies. Supposons n positions particulières correspondant aux coordonnées des nœuds du futur super-élément, autrement dit les 16 nœuds apparaissant sur la Figure 2.2, il peut alors être écrit : $\mathbf{u}^h(x_i, y_i) = \mathbf{N}(x_i, y_i)\mathbf{c}$ où (x_i, y_i) sont les coordonnées cartésiennes du nœud n° i du super-élément et n correspond au nombre de nœuds du super-élément, i.e. $n = 16$. Le système donné par l'Équation (2.4.1) est alors obtenu.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^h(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^h(x_n, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \mathbf{N}(x_n, y_n) \end{pmatrix} \mathbf{c} \quad (2.4.1)$$

L'Équation (2.4.1) peut être réécrite de manière plus concise :

$$\mathbf{d} = \mathbf{N}_e \mathbf{c} \quad (2.4.2)$$

L'expression du vecteur \mathbf{c} , donnée par l'Équation (2.4.2), est maintenant introduite dans l'expression du champ de déplacements et du vecteur traction (Équation (2.3.3)). Les

fonctions d'interpolation du super-élément s'expriment alors en fonction de ddls physiques uniquement (Équation (2.4.3)) ; la position des nœuds internes étant maintenant complètement définie au travers de la matrice \mathbf{N}_e .

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N}\mathbf{N}_e^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{U}\mathbf{d} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}^h = \mathbf{P}\mathbf{N}_e^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{M}\mathbf{d} \quad (2.4.3)$$

où \mathbf{d} est le vecteur des ddls physiques, autrement dit, relatifs aux positions des nœuds du super-élément situés à la fois sur les frontières *externe* et *interne* de l'élément, et, \mathbf{U} et \mathbf{M} sont les matrices des fonctions d'interpolation associées aux ddls physiques pour les déplacements et les contraintes, respectivement.

Remarquons qu'il aurait été intéressant d'exprimer \mathbf{u}^h et \mathbf{T}^h en fonction des ddls physiques de la frontière interne uniquement, car le principe variationnel du super-élément aurait été, de cette manière, exprimé directement en fonction des ddls internes incompatibles, d'une part, et des ddls externes compatibles, d'autre part. Cependant, cela est impossible puisque le système de l'Équation (2.4.2) est *sous-déterminé* dans ce cas, i.e. qu'il y a plus d'inconnues que d'équations. En effet, si n vaut 8 dans l'Équation (2.4.1), le vecteur \mathbf{d} est de taille 16. Par contre, le vecteur \mathbf{c} est de taille 32 car $N = M = 8$ dans les équations de déplacements (Équations (1.5.12)-(1.5.13)). Généralement, la résolution de ce type de système mène soit à une infinité de solutions, soit à aucune solution. Dans les deux cas, cela ne convient pas, et le vecteur \mathbf{c} ne peut donc pas s'exprimer en fonction du vecteur \mathbf{d} .

En introduisant la nouvelle expression du champ de déplacements et du vecteur traction (Équation (2.4.3)), ainsi que l'expression du champ de déplacements inter-éléments (Équation (2.3.1)) dans le principe variationnel décrit par l'Équation (2.2.9), $\Pi_{\text{HT-D}}$ s'écrit alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{HT-D}}(\mathbf{d}, \tilde{\mathbf{q}}_{ext}) = & -\frac{1}{2}\mathbf{d}^t \left(\int_{S_i} \mathbf{M}^t \mathbf{U} \, dS \right) \mathbf{d} - \frac{1}{2}\mathbf{d}^t \left(\int_{S_i} \mathbf{M}^t \mathbf{U}^p \, dS \right) - \frac{1}{2}\mathbf{d}^t \left(\int_{S_i} \mathbf{U}^t \mathbf{T}^p \, dS \right) \\ & - \frac{1}{2}\mathbf{d}^t \left(\int_{S_p} \mathbf{U}^t \mathbf{T}^p \, dS \right) + \mathbf{d}^t \left(\int_{S_i} \mathbf{M}^t \tilde{\mathbf{N}} \, dS \right) \tilde{\mathbf{q}}_{ext} + \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \left(\int_{S_i} \tilde{\mathbf{N}}^t \mathbf{T}^p \, dS \right) \\ & + \text{termes sans } \mathbf{d}, \tilde{\mathbf{q}}_{ext} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Le principe variationnel $\Pi_{\text{HT-D}}$ peut être réécrit sous une forme matricielle :

$$\Pi_{\text{HT-D}} = -\frac{1}{2}\mathbf{d}^t \mathbf{H} \mathbf{d} + \mathbf{d}^t \mathbf{L} \tilde{\mathbf{q}}_{ext} - \mathbf{d}^t \mathbf{r}^c + \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \mathbf{r}^d + \text{termes sans } \mathbf{d}, \tilde{\mathbf{q}}_{ext} \quad (2.4.5)$$

où les matrices \mathbf{H} , \mathbf{L} , et les vecteurs \mathbf{r}^c , \mathbf{r}^d sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \int_{S_i} M_{ki} U_{kj} dS \\ L_{ij} &= \int_{S_i} M_{ki} \tilde{N}_{kj} dS \\ r_i^c &= \frac{1}{2} \left[\int_{S_p} U_{ki} T_k^p dS + \int_{S_i} M_{ki} u_k^p dS + \int_{S_i} U_{ki} T_k^p dS \right] \\ r_i^d &= \int_{S_i} \tilde{N}_{ki} T_k^p dS \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Les matrices \mathbf{H} , \mathbf{L} , et les vecteurs \mathbf{r}^c , \mathbf{r}^d peuvent s'exprimer en fonction des matrices \mathcal{H} , \mathcal{L} , et des vecteurs \mathcal{R}^c , \mathcal{R}^d de l'Équation (2.3.9) :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (\mathbf{N}_e^{-1})^t \mathcal{H} (\mathbf{N}_e^{-1}) \\ \mathbf{L} &= (\mathbf{N}_e^{-1})^t \mathcal{L} \\ \mathbf{r}^c &= (\mathbf{N}_e^{-1})^t \mathcal{R}^c \\ \mathbf{r}^d &= \mathcal{R}^d \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

La minimisation du principe (Équation (2.4.5)) par rapport aux vecteurs \mathbf{d} et $\tilde{\mathbf{q}}_{ext}$ mène toujours à un système linéaire final du type $\mathbf{K}\tilde{\mathbf{q}}_{ext} = \mathbf{f}$. En effet, le processus de minimisation se déroule exactement de la même manière que la minimisation du principe variationnel écrit en fonction de \mathbf{c} et $\tilde{\mathbf{q}}_{ext}$ (Équation (2.3.8)), même si les ddls physiques associés aux nœuds internes ont été introduits dans la formulation. Il est donc proposé de réécrire les conditions de stationnarité du principe (Équation (2.4.5)) de façon à conserver les ddls internes dans la formulation.

2.5 Construction de la matrice de rigidité et du vecteur chargement du super-élément perforé avec nœuds sur la perforation

Dans cette section, la matrice de rigidité et le vecteur chargement du super-élément perforé avec nœuds sur la perforation sont formulés. Pour cela, le vecteur des ddls physiques \mathbf{d} est tout d'abord séparé en deux parties distinctes, l'une correspondant aux nœuds externes, l'autre aux nœuds internes. Le principe variationnel, qui est alors fonction de plusieurs variables correspondant aux différents types de ddls, est finalement minimisé.

Le vecteur des ddls physiques \mathbf{d} est divisé en deux parties distinctes : $\mathbf{d} = (\mathbf{q}_{ext}, \mathbf{q}_{int})$, où \mathbf{q}_{ext} correspond aux ddls physiques associés aux nœuds de la frontière externe du super-élément et \mathbf{q}_{int} correspond aux ddls physiques associés aux nœuds de la frontière interne du super-élément. Notons que les deux vecteurs de ddls \mathbf{q}_{ext} et \mathbf{q}_{int} proviennent directement de la solution homogène $(\mathbf{u}^h, \mathbf{T}^h)$, le champ de déplacements associé n'est donc *a priori* pas compatible avec le champ de déplacements le long de la frontière externe du super-élément obtenu par les EF classiques adjacents. Rappelons que cette compatibilité est assurée *via* le vecteur des ddls $\tilde{\mathbf{q}}_{ext}$. En tenant compte de cette décomposition, le principe variationnel (2.4.5) est réécrit et l'expression (2.5.1) est alors obtenue.

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{HT-D}}[\mathbf{q}_{ext}, \mathbf{q}_{int}, \tilde{\mathbf{q}}_{ext}] = & -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{ext}^t & \mathbf{q}_{int}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{ext} \\ \mathbf{q}_{int} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{ext}^t & \mathbf{q}_{int}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ext} \\ \mathbf{L}_{int} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{ext} \\ & - \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{ext}^t & \mathbf{q}_{int}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{ext}^c \\ \mathbf{r}_{int}^c \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \mathbf{r}^d \\ & + \text{termes sans } \mathbf{q}_{ext}, \mathbf{q}_{int}, \tilde{\mathbf{q}}_{ext} \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Le principe variationnel ainsi développé (Équation (2.5.2)) peut maintenant être minimisé.

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{HT-D}}[\mathbf{q}_{ext}, \mathbf{q}_{int}, \tilde{\mathbf{q}}_{ext}] = & -\frac{1}{2} \mathbf{q}_{ext}^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{q}_{ext} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{H}_{21} \mathbf{q}_{ext} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{ext}^t \mathbf{H}_{12} \mathbf{q}_{int} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{H}_{22} \mathbf{q}_{int} \\ & + \mathbf{q}_{ext}^t \mathbf{L}_{ext} \tilde{\mathbf{q}}_{ext} + \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{L}_{int} \tilde{\mathbf{q}}_{ext} - \mathbf{q}_{ext}^t \mathbf{r}_{ext}^c - \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{r}_{int}^c + \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \mathbf{r}^d \\ & + \text{termes sans } \mathbf{q}_{ext}, \mathbf{q}_{int}, \tilde{\mathbf{q}}_{ext} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

La *première* condition de stationnarité consiste à minimiser $\Pi_{\text{HT-D}}$ par rapport au vecteur de ddls \mathbf{q}_{ext} (Équation (2.5.3)). Notons que le calcul de la dérivée du terme $-\frac{1}{2} \mathbf{q}_{ext}^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{q}_{ext}$ par rapport à la variable \mathbf{q}_{ext} est égal à $-\frac{1}{2} (\mathbf{H}_{11} + \mathbf{H}_{11}^t) \mathbf{q}_{ext}$. Le raccourci fait dans la formulation du super-élément perforé à 8 nœuds, dans les références [9, 50], où la matrice \mathbf{H} est identifiée à la matrice symétrique correspondante $(\mathbf{H} + \mathbf{H}^t)$, ne pose aucun problème dans le calcul final de la matrice de rigidité associée. Par contre, identifier la matrice \mathbf{H}_{11} à la matrice $(\mathbf{H}_{11} + \mathbf{H}_{11}^t)$, est ici incorrect. Si tel était le cas, l'expression de la matrice de rigidité du super-élément et du vecteur chargement \mathbf{f} serait fausse.

$$\frac{\partial \Pi_{\text{HT-D}}}{\partial \mathbf{q}_{ext}} = -\frac{1}{2} (\mathbf{H}_{11} + \mathbf{H}_{11}^t) \mathbf{q}_{ext} - \frac{1}{2} (\mathbf{H}_{21}^t + \mathbf{H}_{12}) \mathbf{q}_{int} + \mathbf{L}_{ext} \tilde{\mathbf{q}}_{ext} + \mathbf{r}_{ext}^c = 0 \quad (2.5.3)$$

Une relation linéaire entre \mathbf{q}_{ext} et les deux autres vecteurs de ddls $\tilde{\mathbf{q}}_{ext}$ et \mathbf{q}_{int} est alors obtenue (Équation (2.5.4)).

$$\mathbf{q}_{ext} = \mathbf{G}_1 \tilde{\mathbf{q}}_{ext} + \mathbf{G}_2 \mathbf{q}_{int} + \mathbf{g} \quad (2.5.4)$$

où $\mathbf{G}_1 = \mathbf{W}_{11}^{-1} \mathbf{L}_{ext}$, $\mathbf{G}_2 = -\frac{1}{2} \mathbf{W}_{11}^{-1} (\mathbf{H}_{21}^t + \mathbf{H}_{12})$, et $\mathbf{g} = -\mathbf{W}_{11}^{-1} \mathbf{r}_{ext}^c$. La matrice \mathbf{W}_{11} est définie comme $\mathbf{W}_{11} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}_{11} + \mathbf{H}_{11}^t)$ et est symétrique par construction.

Ensuite, l'expression de \mathbf{q}_{ext} , donnée par la relation (2.5.4), est introduite dans le principe de l'Équation (2.5.2). Le principe variationnel est alors fonction des ddls $\tilde{\mathbf{q}}_{ext}$ et \mathbf{q}_{int} uniquement (Équation (2.5.5)).

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\text{HT-D}} = & -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \mathbf{G}_1^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{G}_1 \tilde{\mathbf{q}}_{ext} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \mathbf{G}_1^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{G}_2 \mathbf{q}_{int} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \mathbf{G}_1^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{g} \\
 & - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{G}_2^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{G}_1 \tilde{\mathbf{q}}_{ext} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{G}_2^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{G}_2 \mathbf{q}_{int} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{G}_2^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{g} \\
 & - \frac{1}{2} \mathbf{g}^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{G}_1 \tilde{\mathbf{q}}_{ext} - \frac{1}{2} \mathbf{g}^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{G}_2 \mathbf{q}_{int} - \frac{1}{2} \mathbf{g}^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{g} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{H}_{21} \mathbf{G}_1 \tilde{\mathbf{q}}_{ext} \\
 & - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{H}_{21} \mathbf{G}_2 \mathbf{q}_{int} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{H}_{21} \mathbf{g} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \mathbf{G}_1^t \mathbf{H}_{12} \mathbf{q}_{int} \\
 & - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{G}_2^t \mathbf{H}_{12} \mathbf{q}_{int} - \frac{1}{2} \mathbf{g}^t \mathbf{H}_{12} \mathbf{q}_{int} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{H}_{22} \mathbf{q}_{int} \\
 & + \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \mathbf{G}_1^t \mathbf{L}_{ext} \tilde{\mathbf{q}}_{ext} + \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{G}_2^t \mathbf{L}_{ext} \tilde{\mathbf{q}}_{ext} + \mathbf{g}^t \mathbf{L}_{ext} \tilde{\mathbf{q}}_{ext} \\
 & + \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{L}_{int} \tilde{\mathbf{q}}_{ext} - \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \mathbf{G}_1^t \mathbf{r}_{ext}^c - \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{G}_2^t \mathbf{r}_{ext}^c \\
 & - \mathbf{g}^t \mathbf{r}_{ext}^c - \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{r}_{int}^c + \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \mathbf{r}^d + \text{termes sans } \mathbf{q}_{int}, \tilde{\mathbf{q}}_{ext}
 \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

L'expression du principe variationnel peut se réduire à l'Équation (2.5.6).

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\text{HT-D}} [\tilde{\mathbf{q}}_{ext}, \mathbf{q}_{int}] = & \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \mathbf{A}_{11} \tilde{\mathbf{q}}_{ext} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \mathbf{A}_{12} \mathbf{q}_{int} + \frac{1}{2} \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{A}_{21} \tilde{\mathbf{q}}_{ext} \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{A}_{22} \mathbf{q}_{int} - \tilde{\mathbf{q}}_{ext}^t \mathbf{f}_1 - \mathbf{q}_{int}^t \mathbf{f}_2 + \mathbf{e}
 \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

En regroupant le vecteur des ddls physiques associés à la frontière externe du super-élément (où une condition de compatibilité des déplacements est imposée) $\tilde{\mathbf{q}}_{ext}$, et le vecteur des ddls physiques associés à la frontière interne du super-élément (où aucune condition de compatibilité n'est imposée) \mathbf{q}_{int} , dans un unique vecteur \mathbf{q} de la façon suivante $\mathbf{q} = (\tilde{\mathbf{q}}_{ext}, \mathbf{q}_{int})$, le principe se réduit finalement à l'Équation (2.5.7).

$$\Pi_{\text{HT-D}} [\mathbf{q}] = \frac{1}{2} \mathbf{q}^t \mathbf{A} \mathbf{q} - \mathbf{q}^t \mathbf{f} + \mathbf{e} \tag{2.5.7}$$

où la matrice \mathbf{A} , et les vecteurs \mathbf{f} et \mathbf{e} sont définis par les Équations (2.5.8), (2.5.9), et (2.5.10) respectivement.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} \mathbf{A}_{11} = -\mathbf{G}_1^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{G}_1 + 2\mathbf{G}_1^t \mathbf{L}_{ext} \\ \mathbf{A}_{12} = -\mathbf{G}_1^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1^t \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} = -\mathbf{G}_2^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{G}_1 - \mathbf{H}_{21} \mathbf{G}_1 + 2\mathbf{G}_2^t \mathbf{L}_{ext} + 2\mathbf{L}_{int} \\ \mathbf{A}_{22} = -\mathbf{G}_2^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{G}_2 - \mathbf{H}_{21} \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_2^t \mathbf{H}_{12} - \mathbf{H}_{22} \end{cases} \tag{2.5.8}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{G}_1^t\mathbf{H}_{11}\mathbf{g} + \frac{1}{2}\mathbf{G}_1^t\mathbf{H}_{11}^t\mathbf{g} - \mathbf{L}_{ext}^t\mathbf{g} + \mathbf{G}_1^t\mathbf{r}_{ext}^c - \mathbf{r}^d \\ \quad = \mathbf{G}_1^t\mathbf{r}_{ext}^c - \mathbf{r}^d \\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{G}_2^t\mathbf{H}_{11}\mathbf{g} + \frac{1}{2}\mathbf{G}_2^t\mathbf{H}_{11}^t\mathbf{g} + \frac{1}{2}\mathbf{H}_{21}\mathbf{g} + \frac{1}{2}\mathbf{H}_{12}^t\mathbf{g} \\ \quad + \mathbf{G}_2^t\mathbf{r}_{ext}^c + \mathbf{r}_{int}^c \\ \quad = \mathbf{G}_2^t\mathbf{r}_{ext}^c + \mathbf{r}_{int}^c \end{cases} \quad (2.5.9)$$

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{2}\mathbf{g}^t\mathbf{H}_{11}\mathbf{g} - \mathbf{g}^t\mathbf{r}_{ext}^c \quad (2.5.10)$$

La *seconde* condition de stationnarité par rapport au vecteur \mathbf{q} permet finalement de formuler la matrice de rigidité et le vecteur chargement associés au super-élément perforé avec nœuds sur la perforation. En effet, le système linéaire $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$ attendu est construit où :

— la matrice \mathbf{K} est la matrice de rigidité du super-élément définie par la relation :

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t) \quad (2.5.11)$$

— le vecteur chargement \mathbf{f} est défini ci-dessus par l'Équation (2.5.9).

La matrice de rigidité \mathbf{K} est symétrique par construction (Équation (2.5.11)) et s'exprime sous la forme de 4 blocs. Les matrices blocs \mathbf{K}_{11} et \mathbf{K}_{22} correspondent aux rigidités associées aux ddls externes et internes respectivement. Les blocs \mathbf{K}_{12} et \mathbf{K}_{21} correspondent aux rigidités associées à l'interaction entre les nœuds de chacune des deux frontières de l'élément. Ces matrices sont des matrices pleines, ce qui traduit le couplage entre les ddls des nœuds de la frontière interne et ceux de la frontière externe. Quant au vecteur chargement \mathbf{f} , il est composé des champs de contraintes et de déplacements particuliers $(\mathbf{u}^p, \mathbf{T}^p)$ (Équation (2.5.9)). Lorsqu'aucun chargement n'est appliqué sur la perforation, alors $\mathbf{u}^p = \mathbf{T}^p = 0$. Ceci implique que les vecteurs $\mathbf{r}^c = \mathbf{r}^d = 0$, et donc le vecteur chargement $\mathbf{f} = 0$. Cette particularité du super-élément perforé formulé ici, était déjà observée sur le super-élément perforé à 8 nœuds.

Plus généralement, il est important de remarquer que la formulation proposée dans ce chapitre est une généralisation de la formulation du super-élément perforé à 8 nœuds (sans nœuds internes). En effet, si on pose $\mathbf{q}_{int} = 0$ dans le principe de l'Équation (2.5.6), le système linéaire final obtenu après minimisation se réduit au système linéaire relatif aux nœuds externes qui est le suivant :

$$\mathbf{K}_{11}\tilde{\mathbf{q}}_{ext} = \mathbf{f}_1 \quad (2.5.12)$$

Or la matrice \mathbf{K}_{11} , et le vecteur \mathbf{f}_1 ont pour expression :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{11} &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{11}^t) \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{G}_1^t \mathbf{H}_{11} \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_1^t \mathbf{L}_{ext} - \frac{1}{2} \mathbf{G}_1^t \mathbf{H}_{11}^t \mathbf{G}_1 + \mathbf{L}_{ext}^t \mathbf{G}_1 \\ &= \mathbf{L}_{ext}^t \mathbf{W}_{11}^{-1} \mathbf{L}_{ext}\end{aligned}\tag{2.5.13}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \mathbf{G}_1^t \mathbf{r}_{ext}^c - \mathbf{r}^d \\ &= \mathbf{L}_{ext}^t \mathbf{W}_{11}^{-1} \mathbf{r}_{ext}^c - \mathbf{r}^d\end{aligned}\tag{2.5.14}$$

Ces expressions sont analogues à celles obtenues pour le super-élément perforé à 8 nœuds, si on s'assure que l'ordre des séries des fonctions d'interpolation est fixé à $N = M = 4$.

La formulation exacte du super-élément à 8 nœuds est retrouvée en intervenant plus tôt dans le développement du principe. En effet, l'étape de reformulation des fonctions d'interpolation en termes de ddls physiques est inutile pour le super-élément à 8 nœuds. En fixant l'ordre des séries des fonctions d'interpolation à 4 dans le principe de l'Équation (2.3.8), et en minimisant par rapport aux vecteurs \mathbf{c} et \mathbf{q}_{ext} de manière classique, l'expression de la matrice de rigidité et du vecteur chargement du super-élément à 8 nœuds est retrouvée⁵.

2.6 Synthèse

Un nouveau super-élément perforé qui comporte des nœuds sur sa perforation a été formulé dans ce chapitre. Son principe variationnel a tout d'abord été développé en tenant compte des spécificités du nouveau super-élément. Ensuite, le champ de déplacements inter-éléments a été choisi de façon à rendre compatible le super-élément avec des EFs conventionnels voisins de type quadratique. Les champs de contraintes et de déplacements homogènes, qui sont relatifs à des efforts externes, ont été déterminés grâce au formalisme de la méthode des variables complexes. Ils s'écrivent alors sous la forme d'une série où les bornes, N et M , ont été fixées à 8 pour la formulation d'un super-élément perforé à 16 nœuds. L'analyse de solutions particulières de la littérature a mis en évidence que des chargements plus généraux, que ceux utilisés jusqu'à présent, pouvaient être appliqués sur la perforation du super-élément. Grâce à ce formalisme et à la gestion du contact rendue possible par la formulation des nœuds sur la perforation, l'interaction entre le modèle de plaque perforée et un macro-élément rivet peut donc être établie. Après avoir introduit l'expression de ces champs dans le principe variationnel, la minimisation classique a mené

5. La formulation exacte du super-élément à 8 nœuds est retrouvée sachant qu'une simplification n'a pas été considérée dans ces travaux.

à un système linéaire $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$ où les ddls de la perforation disparaissent de la formulation ; seuls les ddls associés à la compatibilité y sont conservés. Cependant, il a été démontré, grâce à l'analyse de super-éléments de la littérature, que la compatibilité des déplacements ne devait être imposée que sur la frontière externe du super-élément et pas sur la frontière interne. Pour contourner cette difficulté, les fonctions d'interpolation du super-élément ont donc été exprimées en termes de ddls physiques, d'une part, et les conditions de stationnarité du principe variationnel ont été réécrites, d'autre part. Finalement, la matrice de rigidité et le vecteur chargement du nouveau super-élément ont été formulés où tous les ddls ont été conservés et où la compatibilité n'est exprimée que sur la frontière externe ; cette formulation étant une généralisation du super-élément perforé à 8 nœuds.

Le nouveau super-élément étant développé, il s'agit désormais d'évaluer la précision des fonctions d'interpolation, qui sont maintenant calculées à l'ordre 8, pour le calcul des champs de contraintes et de déplacements dans le super-élément.

Chapitre 3

Étude des fonctions d'interpolation du nouveau super-élément perforé avec nœuds sur la perforation

L'objet de ce chapitre est d'évaluer la précision et la capacité des fonctions d'interpolation du nouveau super-élément perforé à 16 nœuds à localiser les champs de contraintes et de déplacements au voisinage de la perforation. Puisque l'ajout de nœuds sur la perforation implique une augmentation de l'ordre des fonctions d'interpolation, la méthode de reconstruction de champs initialement développée pour le super-élément à 8 nœuds est d'abord adaptée aux spécificités du nouveau super-élément. Ses fonctions d'interpolation sont, ensuite, évaluées en deux étapes. Dans un premier temps, les déplacements à partir desquels les paramètres de la série sont identifiés, sont prélevés sur une solution analytique de référence. Dans un second temps, une solution numérique de référence est considérée afin d'évaluer l'influence d'imprécisions dans les données d'entrée sur l'identification des paramètres et la reconstruction des champs, en particulier à l'ordre 8.

Les analyses ont montré que les fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8 sont moins précises que celles calculées à l'ordre 4. Ce phénomène contre-intuitif s'explique par le fait que le conditionnement du système linéaire construit pour l'identification des paramètres est moins bon avec l'augmentation de l'ordre. Une étude approfondie a également mis en évidence l'apparition de paramètres parasites à l'ordre 8 lorsque les données d'entrée comportent des imprécisions numériques. Malgré leur valeur proche de zéro, des biais sont alors introduits dans les champs reconstruits. La mise en place de méthodes de préconditionnement, pour améliorer les propriétés du système linéaire, ou de réduction de modèles, pour identifier uniquement les paramètres significatifs, n'étant pas triviale, il a donc été choisi de restreindre la réinterpolation des champs (post-traitement) à l'ordre 4.

Table des matières

3.1	Introduction	76
3.2	Adaptation et application d'une méthode de reconstruction de champs pour l'étude des fonctions d'interpolation	76
3.3	Évaluation des fonctions d'interpolation à partir d'une solution analytique de référence	80
3.4	Évaluation des fonctions d'interpolation à partir d'une solution numérique de référence	89
3.5	Synthèse	97

3.1 Introduction

Un nouveau super-élément perforé qui comporte 16 nœuds dont 8 sur sa perforation a été formulé dans le Chapitre 2 dans l'objectif d'améliorer la prise en compte des perforations dans les assemblages rivetés dans les calculs de structures. Les fonctions d'interpolation du super-élément sont basées sur une méthode de variables complexes qui permet d'exprimer les champs de contraintes et de déplacements sous la forme d'une série tronquée. Les bornes de la série, N et M , ont été fixées à 8 afin de prendre en compte les degrés de liberté supplémentaires associés aux nœuds de la perforation (Section 2.3.2). Dans la littérature, la précision des fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 4, i.e. celles associées au super-élément perforé *sans* nœuds internes, a déjà été démontrée [10]. Par contre, la question est de savoir si le fait d'augmenter l'ordre de ces fonctions, en particulier à 8, n'influe pas sur la précision des champs réinterpolés.

Il est, par conséquent, proposé dans ce chapitre d'évaluer la capacité des fonctions d'interpolation du nouveau super-élément avec nœuds sur la perforation à réinterpoler les champs de contraintes et de déplacements à l'intérieur du domaine perforé. Pour cela, la méthode de reconstruction de champs, initialement développée pour le super-élément à 8 nœuds (Section 1.5.5), est tout d'abord adaptée puis appliquée aux fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8. L'évaluation de ces fonctions est ensuite effectuée en deux temps. D'abord, les déplacements à partir desquels les paramètres de la série (α_j, β_j) sont identifiés, sont prélevés sur une solution analytique de référence. Ensuite, la valeur de ces déplacements est prélevée sur une solution numérique de référence, qui provient de calculs EF fins, de façon à évaluer l'influence d'éventuelles imprécisions dans les données d'entrée sur la réinterpolation des champs.

3.2 Adaptation et application d'une méthode de reconstruction de champs pour l'étude des fonctions d'interpolation

L'objectif est d'évaluer la capacité des fonctions d'interpolation du super-élément perforé à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur sa perforation à calculer les champs de contraintes et de déplacements dans le domaine perforé. Pour cela, une méthode de reconstruction de champs, initialement développée pour l'évaluation des fonctions d'interpolation du super-élément perforé à 8 nœuds [9, 10], est reprise, adaptée et appliquée aux spécificités du nouveau super-élément. Cette méthode, dont le principe a été exposé dans la Section 1.5.5, a été mise en place pour l'étude des fonctions d'interpolation tronquées à l'ordre 4. Étant donné que les bornes des séries pour les fonctions d'interpolation du

super-élément à 16 nœuds sont fixées à $N = M = 8$ (cf. Section 2.3.2), la méthode est généralisée de façon à pouvoir considérer un ordre de troncature générique. Elle a également été étendue afin de pouvoir considérer un nombre quelconque de points de prélèvement, qu'ils soient situés sur la perforation ou non¹. Notons qu'une méthode des moindres carrés est systématiquement utilisée pour la résolution du système linéaire $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ (cf. Section 1.5.5) puisque, nous le verrons par la suite, certaines configurations mènent à un système linéaire surdéterminé (e.g., lorsque les déplacements sont prélevés en 16 points et que l'ordre des fonctions est fixé à 4).

3.2.1 Paramètres de l'étude

Une plaque perforée comportant un trou circulaire centré à l'origine du repère des coordonnées cartésiennes et de rayon r_0 est considérée dans cette étude. Les propriétés mécaniques du matériau de la plaque sont $E = 74\,000$ MPa et $\nu = 0.3$. La valeur de la constante de Muskhelishvili k et le module de cisaillement μ , requis pour le calcul de la solution de K-M, sont $k = 2.0769$ (état de contraintes planes) et $\mu = 28\,462$ MPa.

L'étude proposée ici ne se restreint pas à la seule analyse des fonctions d'interpolation du nouveau super-élément à 16 nœuds, mais elle consiste à examiner, de manière plus générale, l'influence de l'ordre des séries apparaissant dans ces fonctions, du nombre et de la disposition des points de prélèvement sur la précision des champs réinterpolés. Finalement, les paramètres étudiés sont :

- le cas de chargement : traction uniaxiale ou biaxiale, cisaillement simple ou pur,
- l'ordre de troncature des séries dans la solution de K-M (1.5.12)-(1.5.16) , i.e. les valeurs de N et M , avec $N = M$,
- le nombre de points de prélèvement, i.e. le nombre de points où la valeur des déplacements est extraite sur la solution de référence,
- la disposition des points de prélèvement (Figure 3.1).

Notons que la distance de prélèvement, i.e. le paramètre L sur la Figure 3.1, est fixée à 1 dans la suite de l'analyse de façon à ce que le ratio L/r_0 soit égal à 5. Quelle que soit la valeur prise par ce ratio, il a été démontré que la distance de prélèvement n'avait pas d'influence sur la reconstruction des champs de contraintes et de déplacements. Les résultats sont donnés dans l'Annexe D.

Deux configurations s'imposent ici pour l'étude de l'ordre de troncature des fonctions d'interpolation : $N = M = 4$ et $N = M = 8$. L'ordre 4 signifie que la solution de K-M est pilotée par 16 paramètres (α_j, β_j) , alors que pour l'ordre 8, la solution de K-M est

1. Il a été vérifié qu'aucune dégradation des résultats obtenus avec les fonctions d'interpolation du super-élément à 8 nœuds n'a été observée après les modifications apportées à la méthode.

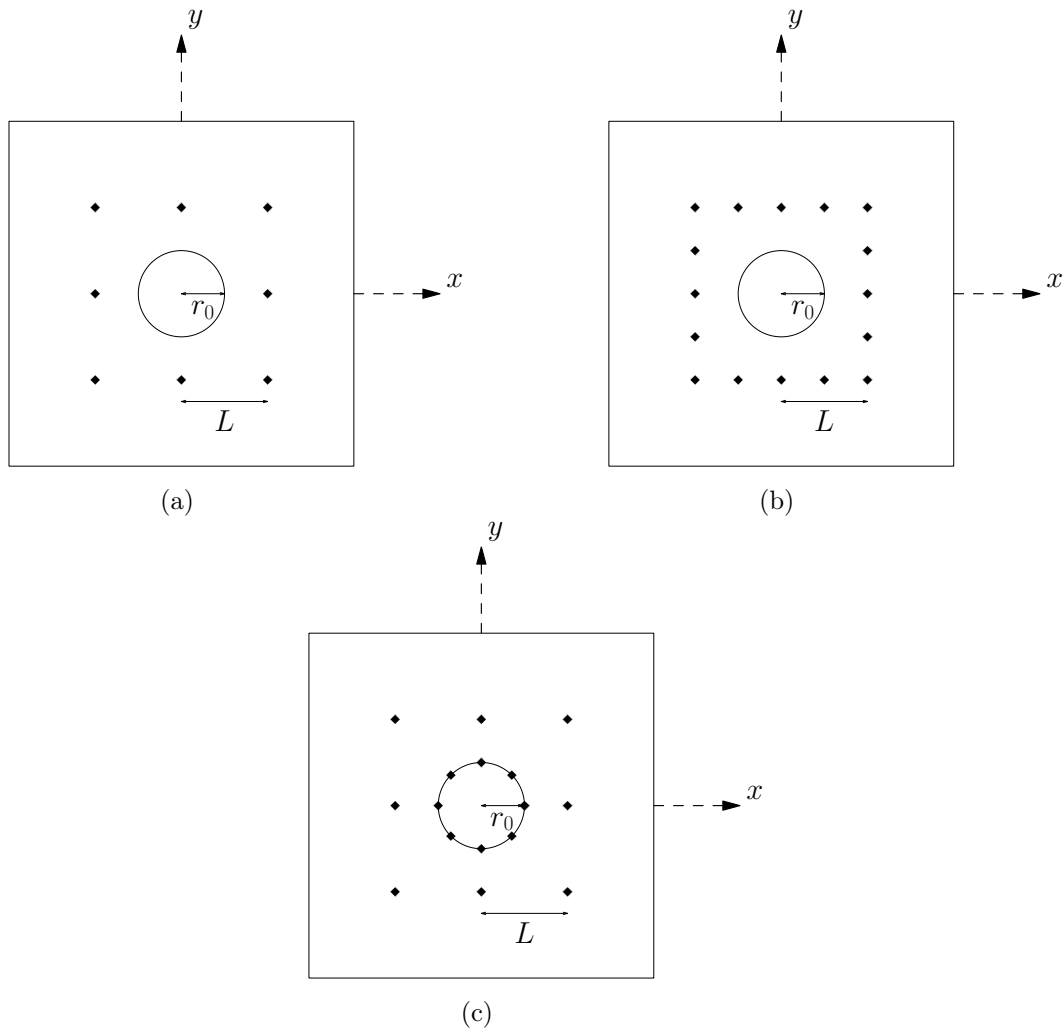


FIGURE 3.1 – Configuration des points de prélèvement pour le calcul de la solution de K-M. Les points de prélèvement sont représentés par le symbole \blacklozenge . (a) 8 points sur le carré, (b) 16 points sur le carré, (c) 8 points sur le carré et 8 points sur la perforation.

pilotée par 32 paramètres (α_j, β_j) . L'Équation (1.5.19) reliant le nombre de paramètres au nombre de nœuds de l'élément, il est nécessaire de prélever des déplacements en au moins 8 points lorsque $N = M = 4$, et en au moins 16 points lorsque $N = M = 8$. Selon les trois configurations présentées dans la Figure 3.1, soit toutes les données sont prélevées loin de la perforation (Figures 3.1(a) et 3.1(b)), soit les données sont prélevées à la fois sur la perforation et loin de la perforation (Figure 3.1(c)). Les résultats obtenus avec la configuration montrée à la Figure 3.1(a) et pour des fonctions d'interpolation tronquées à l'ordre 4 correspondent à ceux obtenus par les fonctions d'interpolation du super-élément à 8 nœuds. Ces résultats ont déjà été validés [94], et ils sont considérés comme les résultats de référence. Une attention particulière est également portée sur la configuration de la Figure 3.1(c). Les points de prélèvement correspondent, effectivement, à la position des nœuds du super-élément perforé visé (Figure 2.2).

Notation : Dans la suite de l'étude, chaque configuration sera représentée par un triplet $\{n_s/n_p/n_o\}$ où :

- n_s est le nombre de points de prélèvement situés sur le carré,
- n_p est le nombre de points de prélèvement situés sur la perforation, et
- n_o est l'ordre des fonctions d'interpolation considéré.

À titre d'exemple, si les fonctions d'interpolation sont tronquées à l'ordre 4 et si les points de prélèvement sont disposés comme présenté sur la Figure 3.1(c), alors cette configuration sera notée par le triplet $\{8/8/4\}$.

En résumé, les fonctions d'interpolation sont évaluées au travers de cinq configurations : $\{8/0/4\}$, $\{8/8/4\}$, $\{16/0/4\}$, $\{16/0/8\}$, et $\{8/8/8\}$. Cette dernière étant la configuration correspondant aux fonctions d'interpolation du super-élément perforé à 16 nœuds visé.

3.2.2 Post-traitement

La solution calculée pour chaque configuration est comparée à la solution de référence en analysant l'erreur relative commise dans le domaine perforé $\{(x, y) \in [-1, 1]^2\}$ pour chaque composante du vecteur des déplacements et du tenseur des contraintes, (u_x, u_y) et $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$, respectivement. Les résultats obtenus sont également comparés le long de quatre lignes particulières (Figure 3.2) : autour de la perforation (**1**), le long de l'axe $\{x = 0\}$ (**2**), de l'axe $\{x = y\}$ (**3**) et de l'axe $\{y = 0\}$ (**4**).

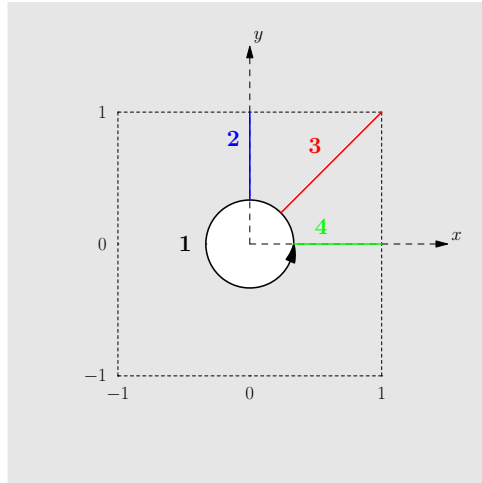


FIGURE 3.2 – Post-traitement des résultats : les lignes particulières où les déplacements et les contraintes sont comparés sont notées de **1** à **4**.

3.3 Évaluation des fonctions d'interpolation à partir d'une solution analytique de référence

3.3.1 Analyse des résultats

Les fonctions d'interpolation sont tout d'abord évaluées à partir d'une solution de référence analytique. La solution analytique considérée a été établie par Kirsch [100] et correspond à une plaque perforée infinie élastique, dont le trou est circulaire centré à l'origine et de rayon r_0 , soumise à un chargement de traction uniaxiale de contrainte lointaine σ_∞ . L'expression des déplacements et des contraintes pour ce cas de chargement est donnée par l'Équation (3.3.1) dans la base polaire².

$$\begin{aligned}
 u_r(r, \theta) &= \frac{\sigma_\infty}{2E} \left[(1 - \nu)r + (1 + \nu) \left(\frac{r_0^2}{r} + \left(r - \frac{r_0^4}{r^3} \right) \cos(2\theta) \right) + \frac{4r_0^2}{r} \cos(2\theta) \right] \\
 u_\theta(r, \theta) &= -\frac{\sigma_\infty}{2E} \left[(1 + \nu) \left(1 + \frac{r_0^4}{r^4} \right) r + (1 - \nu) \frac{2r_0^2}{r} \right] \sin(2\theta) \\
 \sigma_{rr}(r, \theta) &= \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + \frac{3r_0^4}{r^4} - \frac{4r_0^2}{r^2} \right) \cos(2\theta) \\
 \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 + \frac{3r_0^4}{r^4} \right) \cos(2\theta) \\
 \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -\frac{\sigma_\infty}{2} \left(1 - \frac{3r_0^4}{r^4} + \frac{2r_0^2}{r^2} \right) \sin(2\theta)
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Les déplacements (u_x, u_y) sont extraits de cette solution de référence analytique selon les trois configurations de prélèvement précitées (Figure 3.1) afin de construire les systèmes linéaires $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ différents (cf. Section 1.5.5). La résolution du système permet d'identifier deux paramètres significatifs, α_{-1} et α_1 , quelle que soit la configuration étudiée. La valeur de ces paramètres est identifiée à $\alpha_{-1} = 10$ et $\alpha_1 = 5$, pour $\sigma_\infty = 100$ MPa, et ceci indépendamment de la configuration $\{n_s/n_p/n_o\}$ étudiée. Tous les autres paramètres sont quasiment nuls; la plus grande valeur relevée étant de l'ordre de 10^{-11} . L'expression analytique du déplacement u_x^h , par exemple, dont l'expression initiale est rappelée par l'Équation (3.3.2), peut donc se réduire à l'Équation (3.3.3) pour ce cas de chargement. Toutes les composantes du vecteur des déplacements et du tenseur des contraintes sont

2. Le champ de déplacements et le tenseur des contraintes sont, par la suite, exprimés dans la base cartésienne (\vec{e}_x, \vec{e}_y) pour le prélèvement de données et les comparaisons avec la solution de Kolosov-Muskhelishvili.

données en Annexe E.

$$u_x^h(R, \theta) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=-N}^M \alpha_j [(kR^j + R^{-j}) \cos(j\theta) - j(R^j - R^{j-2}) \cos(j-2)\theta] \\ + \beta_j [-(kR^j + R^{-j}) \sin(j\theta) + j(R^j - R^{j-2}) \sin(j-2)\theta] \quad (3.3.2)$$

$$u_x^h(R, \theta) = \frac{1}{2\mu} \alpha_{-1} \left[\left(\frac{k}{R} + R \right) \cos \theta + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^3} \right) \cos 3\theta \right] \\ + \frac{1}{2\mu} \alpha_1 \left[(k-1)R + \frac{2}{R} \right] \cos \theta \quad (3.3.3)$$

La solution de K-M (Équations (1.5.12)-(1.5.16)) est donc maintenant calculée à partir des paramètres (α_j, β_j) identifiés précédemment, et est comparée à la solution de référence de Kirsch. L'erreur relative maximale observée dans le domaine perforé pour chaque composante des déplacements et des contraintes est reportée dans le Tableau 3.1 pour chaque configuration étudiée. Notons que les résultats obtenus avec la configuration $\{8/0/4\}$ correspondent à ceux obtenus par les fonctions d'interpolation du super-élément perforé à 8 nœuds [10].

Tableau 3.1 – Erreur relative maximale (%) observée entre la solution de K-M et la solution de référence de Kirsch pour différentes configurations (ordre de grandeur).

Configuration	u_x	u_y	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xy}
$\{8/0/4\}$	10^{-14}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-11}
$\{8/8/4\}$	10^{-14}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-13}	10^{-12}
$\{16/0/4\}$	10^{-14}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-13}	10^{-14}
$\{16/0/8\}$	10^{-12}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}
$\{8/8/8\}$	10^{-8}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-4}

Toutes les configurations pour lesquelles les fonctions d'interpolation sont calculées à l'ordre 4, $\{n_s/n_p/4\}$, donnent des résultats similaires quelle que soit la configuration de prélèvement (Tableau 3.1). Par conséquent, le nombre et la disposition des points de prélèvement n'a pas d'influence sur la précision des fonctions d'interpolation lorsqu'elles sont tronquées à l'ordre 4.

L'analyse des résultats pour les configurations $\{n_s/n_p/8\}$ montre une légère diminution de la précision des fonctions d'interpolation par rapport à celles calculées à l'ordre 4, et notamment par rapport à celles du super-élément perforé à 8 nœuds (cf. première ligne du Tableau 3.1). En effet, en comparant les résultats obtenus pour la configuration $\{16/0/4\}$ avec ceux obtenus pour la configuration $\{16/0/8\}$, le pourcentage d'erreur pour la composante σ_{xy} , par exemple, passe de $10^{-14}\%$ à $10^{-9}\%$ rien qu'en augmentant l'ordre des fonctions d'interpolation (i.e., le nombre de paramètres (α_j, β_j)). De façon similaire,

si on s'intéresse aux configurations $\{8/8/4\}$ et $\{8/8/8\}$, le pourcentage d'erreur pour les déplacements u_y passe de $10^{-13}\%$ à $10^{-7}\%$. De plus, lorsque les déplacements sont prélevés autour de la perforation, l'écart entre la solution de référence et la solution de K-M calculée à l'ordre 8 est plus important.

En résumé, l'analyse des résultats montre que les fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8 sont moins précises comparé à celles calculées à l'ordre 4. Une perte de précision est, en particulier, observée entre les fonctions d'interpolation du super-élément perforé à 8 nœuds et celles du nouveau super-élément à 16 nœuds (Figure 2.2). En effet, l'erreur relative maximale calculée pour la configuration $\{8/8/8\}$ est de l'ordre de $10^{-4}\%$ pour la composante σ_{xy} , par exemple, alors qu'elle est de l'ordre de $10^{-11}\%$ pour la configuration $\{8/0/4\}$. Notons également que les résultats obtenus pour la configuration $\{8/8/8\}$ sont indépendants de la position des 8 points de prélèvement sur la perforation. Les résultats sont, effectivement, similaires lorsque les points de prélèvement de la perforation sont, par exemple, décalés d'un angle de $\pi/8$, de façon à ce que les points de prélèvement en vis-à-vis soient évités. Les champs de contraintes et de déplacements sont malgré tout reconstruits avec une bonne précision dans tout le domaine perforé avec la configuration $\{8/8/8\}$, comme le montre la Figure 3.3.

Une solution de référence analytique peut être générée à partir de la solution de Kolosov-Muskhelishvili afin d'analyser la précision des fonctions d'interpolation pour d'autres cas de chargement. Les analyses présentées par Langrand *et al.* [94] montrent que la traction biaxiale, le cisaillement simple, et le cisaillement pur sont complètement pilotés par les paramètres α_1 , le couple (β_{-1}, β_1) , et β_{-1} , respectivement. On remarque la présence légitime du paramètre β_1 dans la solution du cisaillement simple qui traduit une rotation rigide. De manière similaire à ce qui a été proposé pour la traction uniaxiale (Équation (3.3.3)), l'expression analytique des déplacements u_x^h , par exemple, peut se réduire aux Équations (3.3.4), (3.3.5), et (3.3.6), pour la traction biaxiale, le cisaillement simple, et le cisaillement pur, respectivement. L'ensemble des composantes du vecteur des déplacements et du tenseur des contraintes, pour les trois cas de chargement, sont données dans l'Annexe E.

$$u_x^h(R, \theta) = \frac{1}{2\mu} \alpha_1 \left[\left((k-1)R + \frac{2}{R} \right) \cos \theta \right] \quad (3.3.4)$$

$$\begin{aligned} u_x^h(R, \theta) = & \frac{1}{2\mu} \beta_{-1} \left[\left(\frac{k}{R} + R \right) \sin \theta + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^3} \right) \sin 3\theta \right] \\ & + \frac{1}{2\mu} \beta_1 \left[-(k+1)R \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

$$u_x^h(R, \theta) = \frac{1}{2\mu} \beta_{-1} \left[\left(\frac{k}{R} + R \right) \sin \theta + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^3} \right) \sin 3\theta \right] \quad (3.3.6)$$

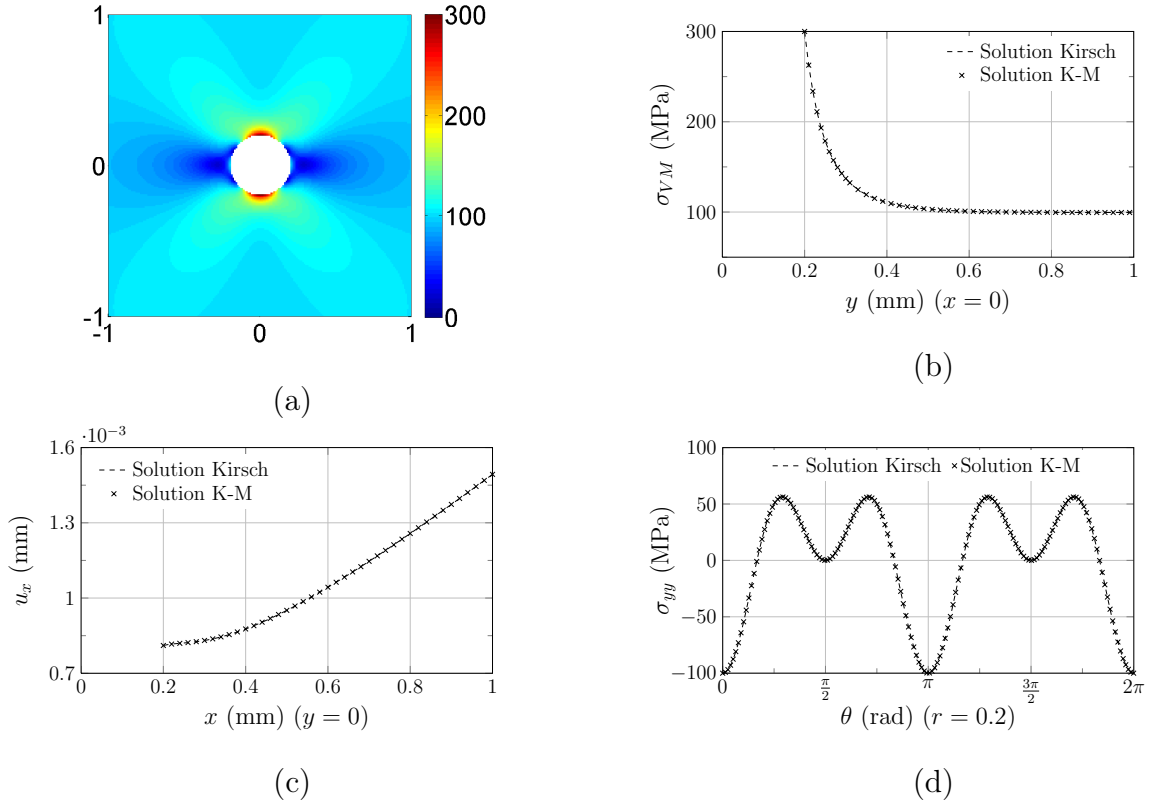


FIGURE 3.3 – Comparaison entre la solution analytique de référence de Kirsch et la solution de K-M pour la configuration $\{8/8/8\}$. (a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x=0\}$, (c) u_x le long de l'axe $\{y=0\}$, (d) σ_{yy} le long de la perforation.

Les solutions de référence considérées pour cette étude sont établies avec les valeurs de paramètres suivantes :

- $\alpha_1 = 17.64$ pour la traction biaxiale,
- $(\beta_{-1}, \beta_1) = (9.15, -4.20)$ pour le cisaillement simple,
- $\beta_{-1} = 19.02$ pour le cisaillement pur.

Ces valeurs de paramètres correspondent à une contrainte équivalente de von Mises qui vaut, en moyenne sur le contour du domaine perforé, 177 MPa pour la traction biaxiale, 80 MPa pour le cisaillement simple, et 165 MPa pour le cisaillement pur.

La méthodologie, présentée pour la traction uniaxiale, est appliquée à ces nouveaux cas de chargement. L'erreur relative maximale observée dans le domaine perforé entre la solution calculée et celle de référence est présentée dans le Tableau 3.2 pour chaque configuration. L'analyse de ces données mène à des conclusions similaires à celles déjà obtenues pour la traction uniaxiale. Ainsi, quel que soit le type de chargement considéré, l'erreur relative maximale augmente lorsque l'ordre est égal à 8 et particulièrement lorsque des points de prélèvement sont situés sur la perforation. Les résultats obtenus pour les champs de contraintes et de déplacements pour la configuration $\{8/8/8\}$ sont néanmoins reconstruits

Tableau 3.2 – Erreur relative maximale (%) observée entre la solution de K-M calculée et la solution de référence générée pour chaque configuration et pour différents cas de chargement (ordre de grandeur).

Type de chargement	Configuration	u_x	u_y	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xy}
Traction biaxiale	{8/0/4}	10^{-14}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-13}	10^{-14}
	{8/8/4}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-12}
	{16/0/4}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-12}
	{16/0/8}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-10}
	{8/8/8}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-5}
Cisaillement simple	{8/0/4}	10^{-14}	10^{-13}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-13}
	{8/8/4}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-13}
	{16/0/4}	10^{-14}	10^{-13}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-13}
	{16/0/8}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-9}	10^{-9}	10^{-10}
	{8/8/8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-6}
Cisaillement pur	{8/0/4}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-13}
	{8/8/4}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-13}
	{16/0/4}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}	10^{-14}
	{16/0/8}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-9}	10^{-9}	10^{-10}
	{8/8/8}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}

avec précision dans le domaine perforé, quel que soit le chargement considéré, comme le montre la Figure 3.4 pour la traction biaxiale, la Figure 3.5 pour le cisaillement simple, et la Figure 3.6 pour le cisaillement pur. Notons que pour chaque configuration, la valeur des paramètres significatifs identifiés correspond aux valeurs données en entrée pour chaque cas de chargement. Tous les autres paramètres identifiés pour le calcul de la solution de K-M sont proches de zéro, les plus grandes valeurs étant de l'ordre de 10^{-11} , 10^{-12} , et 10^{-10} , pour la traction biaxiale, le cisaillement simple, et le cisaillement pur, respectivement ; ce qui est négligeable en comparaison avec les valeurs prises par les paramètres significatifs.

En conclusion, les fonctions d'interpolation associées au super-élément avec nœuds sur sa perforation sont moins précises comparé à celles associées au super-élément perforé sans nœuds internes, quel que soit le cas de chargement étudié. Une diminution de la précision de ces fonctions est, en fait, observée lorsque l'ordre augmente, i.e. lorsque le nombre de paramètres (α_j, β_j) augmente. De plus, la disposition des points de prélèvement a une influence sur la précision de ces fonctions lorsqu'elles sont calculées à l'ordre 8, mais pas lorsqu'elles le sont à l'ordre 4. Le phénomène observé semble contre-intuitif puisque plus l'ordre est grand, plus le nombre de paramètres pour décrire la solution de K-M est grand. La solution de K-M est donc, *a priori*, supposée être une meilleure approximation de la solution exacte lorsque le nombre de paramètres augmente. Des éléments de réponse sur l'origine de ce phénomène font l'objet d'une discussion dans la section suivante.

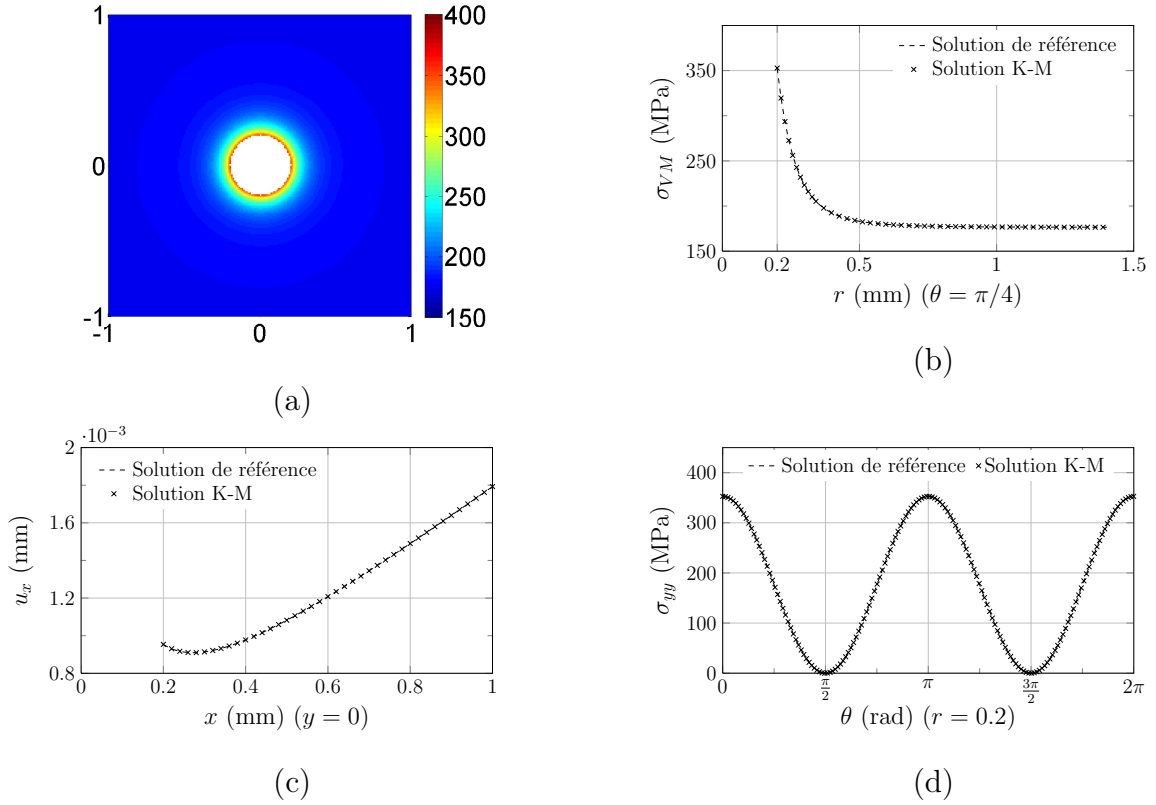


FIGURE 3.4 – Comparaison entre la solution analytique de référence générée et la solution de K-M pour la configuration $\{8/8/8\}$ pour le cas de la traction biaxiale. (a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = 0\}$, (c) u_x le long de l'axe $\{y = 0\}$, (d) σ_{yy} le long de la perforation.

3.3.2 Discussion sur les résultats numériques obtenus

L'augmentation de l'ordre des fonctions d'interpolation signifie que les champs de déplacements et de contraintes sont déterminés avec un nombre plus important de paramètres (α_j, β_j) . Cependant, la littérature montre que peu de paramètres sont significatifs pour décrire des cas de chargement simples (i.e., traction, cisaillement) [10]. Le phénomène observé peut donc s'expliquer par le fait d'ajouter à la solution la contribution de paramètres qui devraient être exactement égaux à zéro théoriquement. Un biais est alors introduit lorsque la solution est déterminée numériquement même si les paramètres concernés prennent des valeurs très faibles.

Ce phénomène de sensibilité des fonctions d'interpolation en fonction du nombre de paramètres dans la série apparaît également dans la littérature. En effet, Rezaiee *et al.* [97] ont développé un élément membrane de type hybride-contrainte qui comporte des degrés de liberté en rotation dont les fonctions d'interpolation s'expriment sous la forme d'une série de fonctions d'Airy. Les meilleurs résultats sont obtenus pour le nombre minimum de

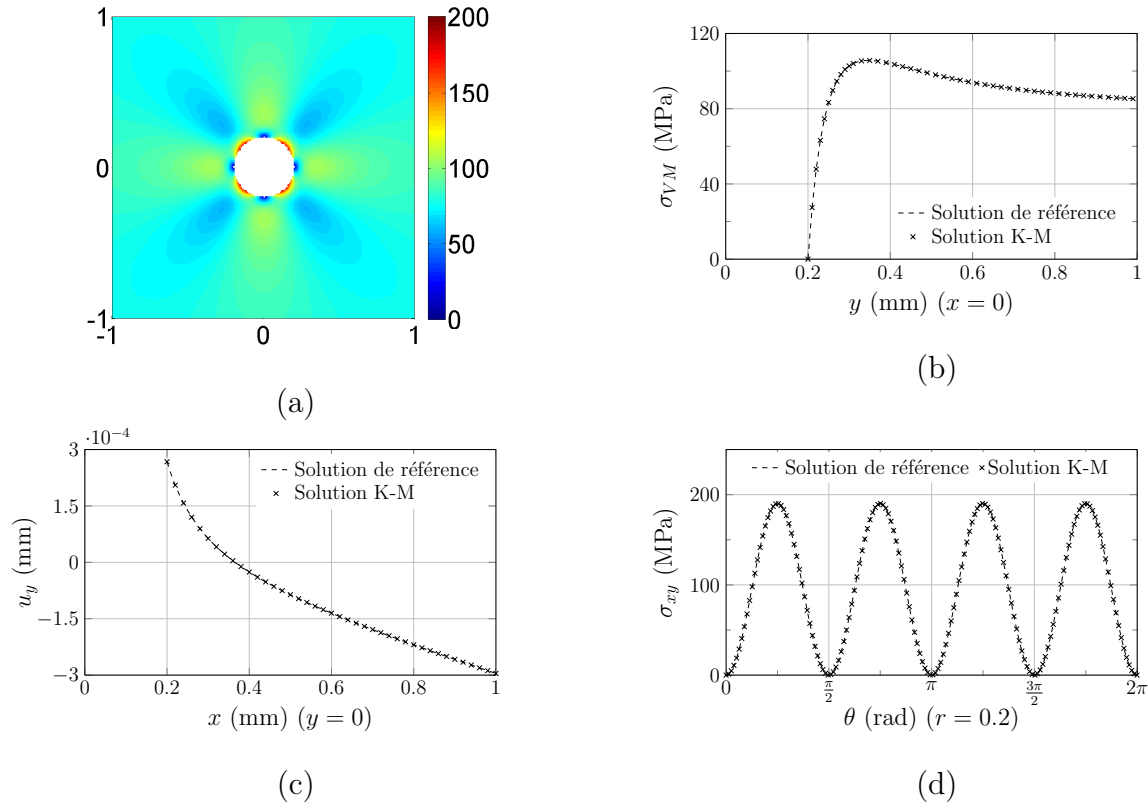


FIGURE 3.5 – Comparaison entre la solution analytique de référence générée et la solution de K-M pour la configuration $\{8/8/8\}$ pour le cas du cisaillement simple. (a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = 0\}$, (c) u_y le long de l'axe $\{y = 0\}$, (d) σ_{xy} le long de la perforation.

coefficients requis par la relation (1.5.19). Ce sujet a également fait l'objet de discussions entre Piltner [93, 101] et Dhanasekar *et al.* [55]. Ce dernier propose une méthode, différente de celle de Piltner, pour le calcul des potentiels de Kolosov-Muskhelishvili, rendant la solution plus stable avec l'augmentation du nombre de paramètres (α_j, β_j) . Selon Piltner, la précision reste stable malgré tout avec l'augmentation du nombre de paramètres avec les potentiels calculés initialement [93]. D'ailleurs, ce dernier présente des résultats meilleurs avec un super-élément perforé à 24 nœuds par rapport à un super-élément à 8 nœuds (cf. Tableaux 2, 3, 4, 5 de la référence [93]). Cependant, ces conclusions sont fondées sur des comparaisons effectuées uniquement en un ou deux points du contour de la perforation pour des raisons de calcul de coefficient de concentration des contraintes (noté K_t). L'étude présentée ici s'efforce d'analyser chaque solution obtenue dans le domaine perforé entier $\{(x, y) \in [-1, 1]^2\}$, et n'est donc pas restreinte à quelques points du domaine. En effet, dans l'optique de prédire la rupture du milieu perforé, il est admis d'utiliser des critères de rupture globaux (e.g., calcul de l'énergie d'amorçage de la première macro-fissure) couplés à des critères de rupture locaux (e.g., variable de fragilisation structurale) [22, 102]. Or les critères locaux nécessitent de connaître la distribution des contraintes et des déformations au voisinage de la perforation. Notons qu'à proximité du trou, toutes les

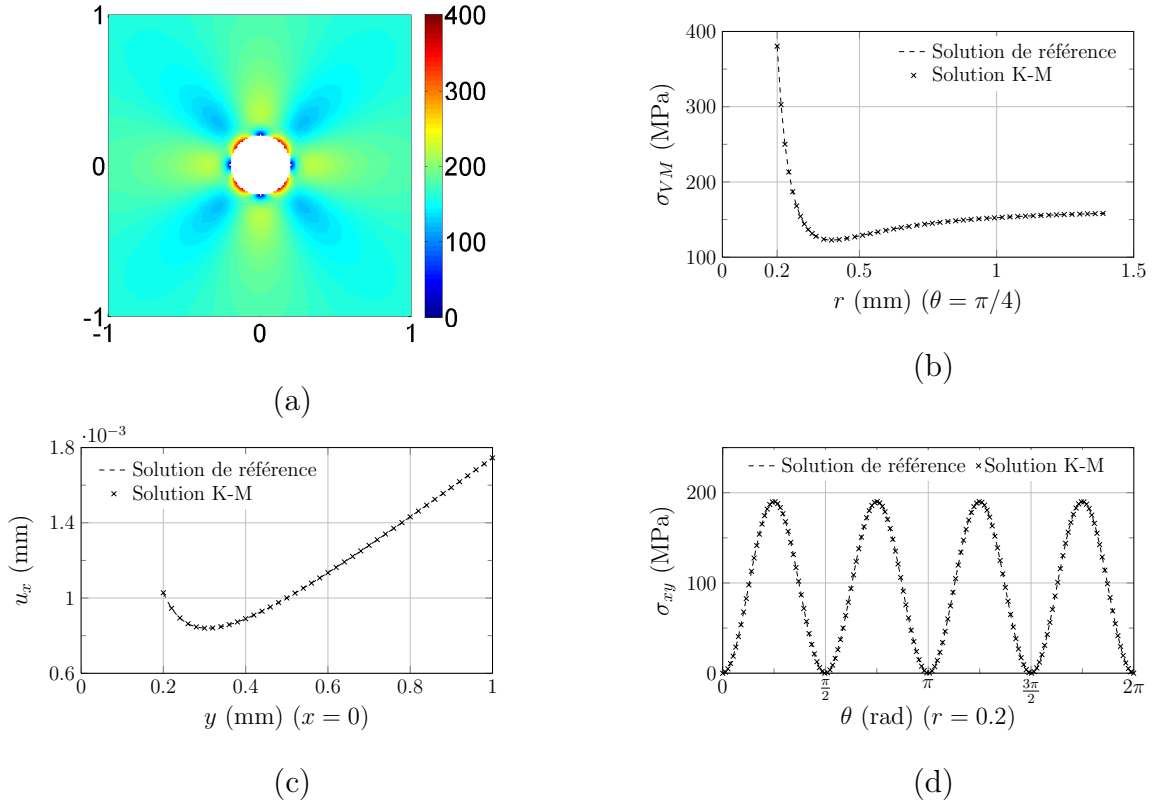


FIGURE 3.6 – Comparaison entre la solution analytique de référence générée et la solution de K-M pour la configuration $\{8/8/8\}$ pour le cas du cisaillement pur. (a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = y\}$, (c) u_x le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) σ_{xy} le long de la perforation.

configurations donnent de très bons résultats et en particulier pour la valeur du coefficient de concentration des contraintes qui vaut bien 3 pour la traction uniaxiale, et 2 pour la traction biaxiale [103] quelle que soit la configuration³. L'erreur relative maximale dans le Tableau 3.1 n'est d'ailleurs jamais observée sur le contour de la perforation.

En résumé, la sensibilité des fonctions d'interpolation avec l'augmentation du nombre de paramètres est un phénomène qui est également observé dans la littérature. Il est donc intéressant de mettre en évidence l'origine de cette sensibilité.

3. L'erreur en pourcentage sur le calcul du K_t pour la traction uniaxiale, par exemple, est de l'ordre de $10^{-14}\%$ pour les configurations à l'ordre 4, et de l'ordre de $10^{-11}\%$ pour les configurations à l'ordre 8.

Tableau 3.3 – Informations sur le système linéaire $\mathbf{A}_{ls}\mathbf{c} = \mathbf{b}_{ls}$.

Configuration	Taille de \mathbf{A}_{ls}	Taille de \mathbf{c}	Taille de \mathbf{b}_{ls}	$cond(\mathbf{A}_{ls})$
{8/0/4}	16×16	16×1	16×1	$1.5025e^7$
{8/8/4}	16×16	16×1	16×1	$4.7238e^6$
{16/0/4}	16×16	16×1	16×1	$8.7729e^6$
{16/0/8}	32×32	32×1	32×1	$2.0136e^{14}$
{8/8/8}	32×32	32×1	32×1	$3.9873e^{14}$

Les paramètres (α_j, β_j) de la solution de K-M sont identifiés en résolvant un système linéaire $\mathbf{Ac} = \mathbf{b}$, comme présenté dans la Section 1.5.5. L'étude du conditionnement⁴ du système linéaire peut alors être pertinente puisqu'il mesure la sensibilité de la solution du système aux erreurs introduites dans la matrice, $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$, ou dans le vecteur second membre, $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$. Un léger biais introduit dans la matrice \mathbf{A} ou dans le vecteur \mathbf{b} peut provoquer des erreurs importantes dans la détermination des paramètres contenus dans le vecteur \mathbf{c} si le conditionnement de la matrice du système linéaire à résoudre est grand. Une méthode des moindres carrés est appliquée et par conséquent la résolution du système $\mathbf{Ac} = \mathbf{b}$ revient à la résolution du système linéaire carré $\mathbf{A}_{ls}\mathbf{c} = \mathbf{b}_{ls}$ où $\mathbf{A}_{ls} = \mathbf{A}^t\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}_{ls} = \mathbf{A}^t\mathbf{b}$. Il est important de noter que la matrice \mathbf{A} , et donc *a fortiori* la matrice \mathbf{A}_{ls} , est la même quelles que soient les données prélevées, et donc quel que soit le cas de chargement étudié. Elle est, en effet, définie uniquement à partir des coordonnées des points de prélèvement, de l'ordre des séries de Laurent considéré, et des équations associées aux déplacements (Équations (1.5.12)-(1.5.13)). Seul le vecteur \mathbf{b} , et donc le vecteur \mathbf{b}_{ls} , diffère en fonction du cas de chargement. Le conditionnement de la matrice \mathbf{A}_{ls} est donc indépendant du cas de chargement étudié. Sa valeur pour chaque configuration est donnée dans le Tableau 3.3⁵. Le conditionnement de la matrice \mathbf{A}_{ls} est plus faible lorsque le système linéaire initial est surdéterminé, i.e. pour les configurations {8/8/4} et {16/0/4}. Le conditionnement du système linéaire à résoudre est nettement plus élevé pour les configurations à l'ordre 8, i.e. $\{n_s/n_p/8\}$. Par conséquent, l'identification des paramètres (α_j, β_j) est plus sensible aux imprécisions numériques à l'ordre 8 qu'à l'ordre 4.

Les imprécisions numériques observées sur les fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8 peuvent s'expliquer par un mauvais conditionnement du système linéaire à résoudre. Pour illustrer l'influence du mauvais conditionnement sur la précision des fonctions d'interpolation, une analyse similaire à celle présentée ci-dessus est réalisée avec,

4. Le conditionnement d'une matrice carrée inversible \mathbf{A} est le nombre $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$ où $\|\cdot\|$ est une norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|$ qui est définie par $\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{v} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$. La valeur du conditionnement dépend de la norme choisie. Parmi les normes usuelles, la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne est définie par $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^t\mathbf{A})}$ avec $\rho(\mathbf{M}) = \max_i |\lambda_i|$ le rayon spectral de la matrice \mathbf{M} où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice.

5. Les valeurs du conditionnement données dans le Tableau 3.3 sont obtenues par l'opérateur Matlab noté $cond(\cdot)$ qui est relatif à la norme euclidienne.

cette fois, une solution de référence numérique issue d'un modèle EF. De cette manière, il s'agit d'évaluer les conséquences d'une approximation introduite dans le vecteur second membre \mathbf{b} sur l'identification des paramètres (α_j, β_j) et sur la précision des champs de déplacements et de contraintes réinterpolés.

3.4 Évaluation des fonctions d'interpolation à partir d'une solution numérique de référence

L'objet de cette étude est d'évaluer l'influence d'une approximation introduite dans les déplacements, qui sont les données d'entrée, sur la précision des fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8. Pour cela, des solutions numériques provenant de calculs EF, dont le maillage est raffiné à proximité de la perforation, sont considérées comme référence. Un modèle EF d'une plaque perforée, dont la perforation est centrée à l'origine, est donc construit (Figure 3.7). Les éléments finis considérés sont des éléments rectangulaires quadratiques à 8 nœuds, et 2 ddls par nœud. Les caractéristiques matériau de la plaque perforée et la taille de la perforation restent identiques à celles déjà données dans l'analyse précédente (Section 3.2.1). Quatre cas de chargement sont étudiés : la traction uniaxiale et biaxiale, le cisaillement pur et simple⁶, comme dans l'analyse précédente. Notons que les résultats obtenus avec le maillage EF de la Figure 3.7 pour les 4 cas de chargement cités seront également utilisés comme référence pour la validation du nouveau super-élément perforé (Section 4.3.1).

3.4.1 Analyse des résultats

Les déplacements (u_x, u_y) sont extraits des solutions de référence numériques correspondantes aux quatre types de chargement analysés, selon les trois configurations de la Figure 3.1. Les valeurs extraites du déplacement étant des valeurs approchées, il est donc

6. Les conditions aux limites appliquées pour générer les cas de chargements mentionnés ci-dessus sont des conditions aux limites cinématiques imposées aux nœuds situés à droite, à gauche, en bas ou en haut de la plaque. Les conditions aux limites considérées dans cette étude sont les suivantes :

- Traction uniaxiale : $u_x(t) = -0.0117t$ et $u_y(t) = 0$ à gauche, $u_x(t) = 0.0117t$ et $u_y(t) = 0$ à droite ;
- Traction biaxiale : $u_x(t) = -0.0117t$ à gauche, $u_x(t) = 0.0117t$ à droite, $u_y(t) = -0.0117t$ en bas, et $u_y(t) = 0.0117t$ en haut ;
- Cisaillement pur : $u_y(t) = -0.0117t$ à gauche, $u_y(t) = 0.0117t$ à droite, $u_x(t) = -0.0117t$ en bas, et $u_x(t) = 0.0117t$ en haut ;
- Cisaillement simple : $u_x(t) = -0.0117t$ et $u_y(t) = 0$ en bas, $u_x(t) = 0.0117t$ et $u_y(t) = 0$ en haut.

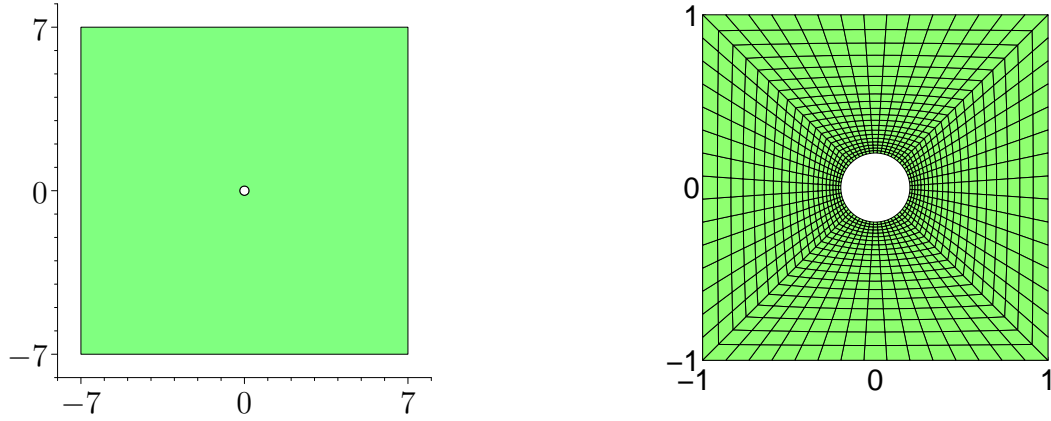


FIGURE 3.7 – Maillage EF standard utilisé pour la construction des résultats de référence numériques et zoom sur la partie centrale.

intéressant de quantifier, en amont de l'analyse, l'approximation qui est faite sur ces valeurs par rapport aux valeurs exactes.

Sur tous les cas de chargement, l'erreur maximale entre les déplacements extraits des solutions analytiques (Équations (3.3.3)-(3.3.6)) et ceux extraits des solutions numériques est de l'ordre de 3.2% pour les configurations à 8 points de prélèvement sur le carré (Figures 3.1(a) et 3.1(c)), et elle est de l'ordre de 11.7% pour la configuration à 16 points de prélèvement sur le carré (Figure 3.1(b)). La question est, maintenant, de savoir si ces écarts sur les données d'entrée ont une influence sur l'identification des paramètres (α_j, β_j) , et *a fortiori* sur le calcul des champs $(\mathbf{u}^h, \boldsymbol{\sigma}^h)$.

Les paramètres (α_j, β_j) des solutions de K-M sont maintenant identifiés, pour chaque cas de chargement, à partir des déplacements extraits des solutions de référence numériques. La valeur des paramètres significatifs, relatifs à chaque type de chargement, est correctement déterminée quels que soient la configuration et l'ordre étudiés. Cependant, pour les configurations $\{16/0/n_o\}$, des paramètres supplémentaires autres que les paramètres significatifs prennent une valeur non négligeable. Par exemple, les paramètres identifiés pour la configuration $\{16/0/4\}$ dans le cas d'un cisaillement simple sont reportés dans le Tableau 3.4. Les paramètres caractéristiques du cisaillement simple, soulignés en trait plein, sont retrouvés. Par contre, les autres paramètres, soulignés en trait pointillé, pourraient avoir une influence sur la reconstruction des champs. Notons d'ailleurs que c'est sur cette configuration de prélèvement que les écarts sur les données d'entrée sont les plus importants quel que soit le cas de chargement. Par contre, concernant la configuration $\{8/8/8\}$, qui nous intéresse particulièrement, l'identification des paramètres est correcte quel que soit le cas de chargement, et aucun paramètre supplémentaire n'est visiblement prépondérant : la valeur identifiée la plus grande, mis à part les paramètres significatifs, est de l'ordre de 10^{-4} .

Tableau 3.4 – Valeur des paramètres (α_j, β_j) de la solution de K-M calculée à partir d'une solution numérique de référence pour la configuration $\{16/0/4\}$ (cisaillement simple).

j	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
α_j	$-8.4887e^{-15}$	<u>0.0234</u>	$4.2665e^{-12}$	<u>0.5897</u>	$-3.3771e^{-13}$	<u>0.0136</u>	$2.0021e^{-14}$	$-2.2517e^{-5}$
β_j	$-7.1277e^{-4}$	<u>0.0036</u>	<u>9.1543</u>	<u>-0.0866</u>	<u>-4.2039</u>	<u>0.0020</u>	$-6.3641e^{-4}$	$4.2848e^{-6}$

Les champs de contraintes et de déplacements sont reconstruits à partir des paramètres précédemment identifiés, et sont comparés aux résultats de référence numériques. L'analyse montre que les fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8 sont moins précises que celles calculées à l'ordre 4, comme démontré dans l'analyse précédente (Section 3.3.1). Il est intéressant de noter que, malgré les paramètres supplémentaires identifiés sur la configuration $\{16/0/4\}$ (Tableau 3.4), les résultats obtenus restent précis. Les modes associés à ces paramètres supplémentaires doivent donc se compenser. Par contre, en ce qui concerne l'ordre 8, des écarts notables sont observés pour deux configurations en particulier : la configuration $\{16/0/8\}$ dans le cas d'une traction uniaxiale ou biaxiale, et la configuration $\{8/8/8\}$ dans le cas d'un cisaillement pur ou simple. Par exemple, l'écart maximal observé sur la contrainte équivalente de von Mises est de l'ordre de 308 MPa pour la configuration $\{16/0/8\}$ en traction biaxiale (Figure 3.8) ; la valeur calculée en ce point étant de 485 MPa au lieu de 177 MPa. Concernant la configuration $\{8/8/8\}$, un écart de 63 MPa pour σ_{VM} en cisaillement pur est observé : la valeur de référence en ce point est égale à 158 MPa, et la valeur calculée vaut 221 MPa (Figure 3.9). Ces écarts sont certes importants, néanmoins ils sont très localisés ; uniquement au voisinage de certains points situés sur le contour du domaine d'étude $[-1, 1]^2$, comme le montrent les Figures 3.8(a), 3.8(b), 3.9(a), et 3.9(b). Les résultats obtenus sont effectivement globalement cohérents avec le cas de chargement étudié. D'ailleurs, si on s'intéresse à la configuration $\{8/8/8\}$ en cisaillement pur, l'erreur relative par rapport aux résultats numériques de référence est inférieure à 5% dans 96% du domaine perforé pour les déplacements u_x et u_y . Et, elle est inférieure à 5% dans 96.33% du domaine perforé pour σ_{VM} . De plus, les résultats obtenus au voisinage de la perforation sont très précis, comme illustré dans les Figures 3.8(d) et 3.9(d).

En résumé, une approximation introduite dans les déplacements prélevés a une influence sur la détermination des paramètres (α_j, β_j) , et sur les champs $(\mathbf{u}^h, \boldsymbol{\sigma}^h)$ reconstruits, en particulier lorsque l'ordre des fonctions d'interpolation est égal à 8. Cependant, si les écarts observés sur la configuration $\{16/0/8\}$ peuvent être prévisibles, les écarts observés sur la configuration $\{8/8/8\}$ sont inattendus puisque les paramètres (α_j, β_j) sont correctement identifiés pour tous les cas de chargement.

L'origine de ces écarts est, en fait, liée à l'influence de deux paramètres, β_{-5} et β_7 . Ces

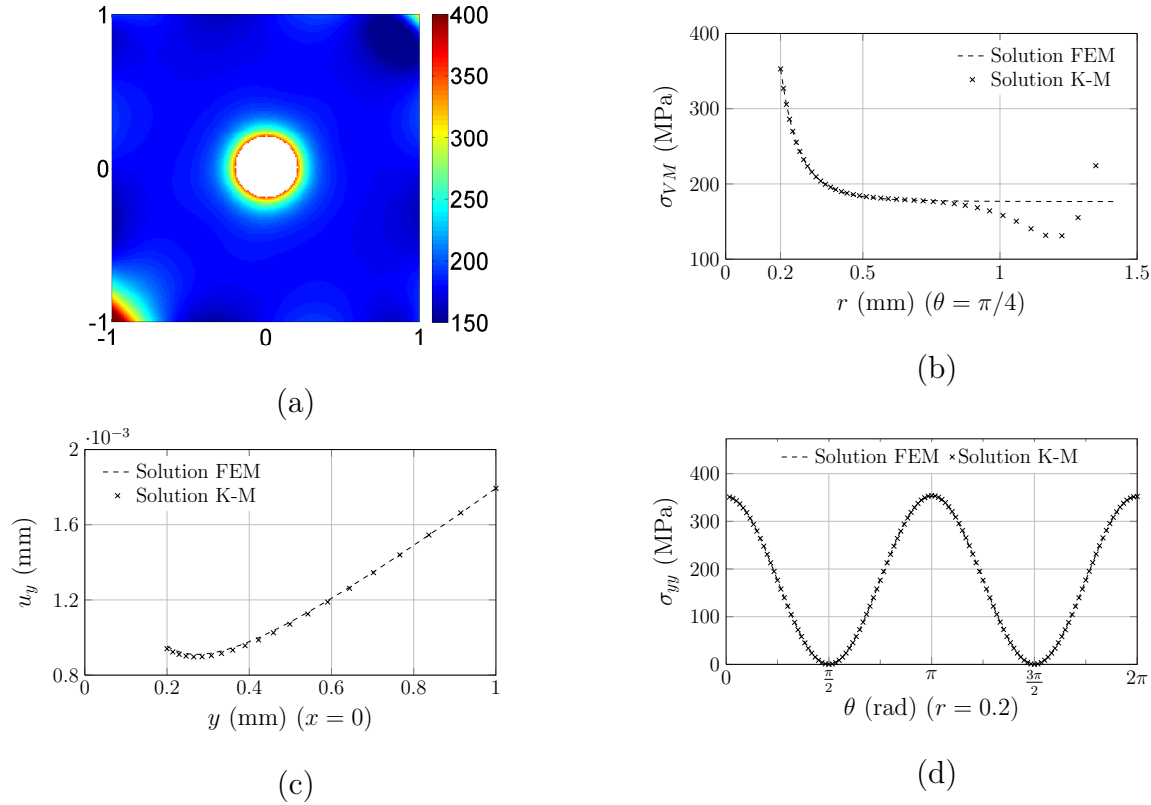


FIGURE 3.8 – Comparaison entre la solution numérique de référence et la solution de K-M pour la configuration $\{16/0/8\}$ pour le cas de la traction biaxiale. (a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = y\}$, (c) u_x le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) σ_y le long de la perforation.

derniers paraissent insignifiants puisqu'ils sont de l'ordre de 10^{-4} et 10^{-6} , respectivement⁷. Pourtant, la solution de K-M est calculée avec précision lorsque ces deux paramètres sont fixés à zéro (les autres paramètres restant inchangés), comme le montre la Figure 3.10(a). Notons que ces paramètres sont pris en compte dans le calcul des champs $(\mathbf{u}^h, \boldsymbol{\sigma}^h)$ lorsque les fonctions d'interpolation sont tronquées à l'ordre 8, mais ils ne le sont pas à l'ordre 4. De plus, on peut remarquer que ces paramètres n'influaient pas lorsque les déplacements étaient extraits de solutions analytiques puisqu'ils étaient au maximum de l'ordre de 10^{-10} .

Les écarts observés pour la configuration $\{16/0/8\}$ dans le cas d'une traction uniaxiale ou biaxiale sont, quant à eux, dus à l'influence de plusieurs paramètres : α_{-6} , α_{-4} , α_6 , α_8 , β_{-6} , β_{-4} , β_6 , et β_8 . Les deux paramètres dont la valeur est la plus élevée, α_{-4} et β_{-4} , font partie des paramètres remarquables en début d'analyse comme pouvant influencer sur la

7. Les valeurs prises par les paramètres significatifs dans cette étude sont : $\beta_{-1} = 19.02$ pour le cas du cisaillement pur, $\beta_{-1} = 9.16$ et $\beta_1 = -4.20$ pour le cas du cisaillement simple.

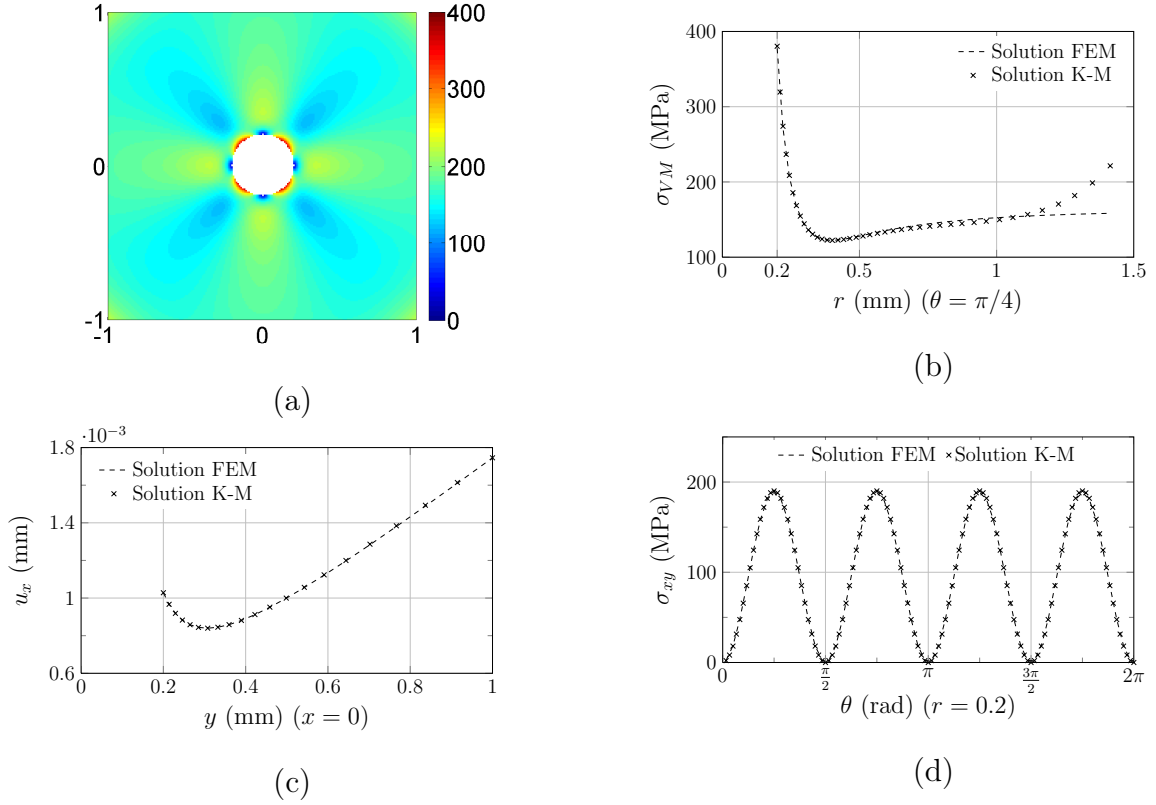


FIGURE 3.9 – Comparaison entre la solution numérique de référence et la solution de K-M pour la configuration $\{8/8/8\}$ pour le cas du cisaillement pur. (a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = y\}$, (c) u_x le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) σ_{xy} le long de la perforation.

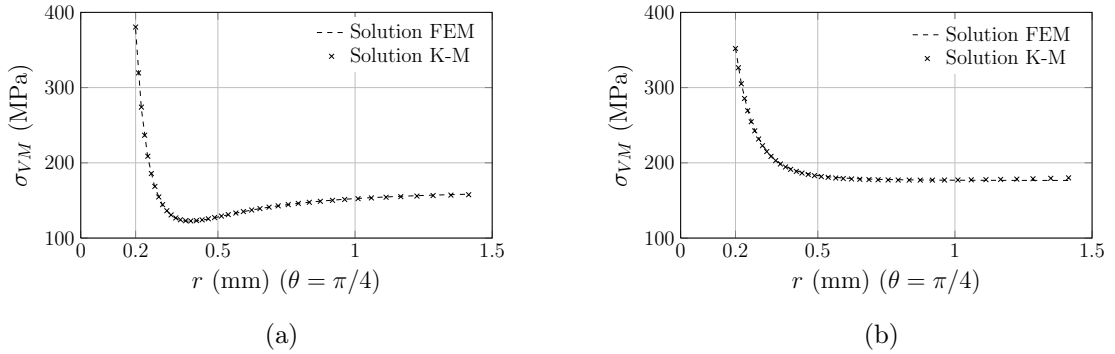


FIGURE 3.10 – Comparaison entre la solution numérique de référence et la solution de K-M lorsque les paramètres parasites sont fixés à zéro. (a) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = y\}$ pour le cas du cisaillement pur (configuration $\{8/8/8\}$), (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = y\}$ pour le cas de la traction biaxiale (configuration $\{16/0/8\}$).

solution⁸. Cependant, ils sont de l'ordre de 10^{-3} , ce qui semble négligeable par rapport

8. Les modes associés aux autres paramètres jugés comme étant susceptibles d'influer la solution doivent se compenser, comme cela est observé sur la configuration $\{16/0/4\}$ (Tableau 3.4).

aux paramètres significatifs⁹. Pourtant, la solution est retrouvée lorsque l'ensemble des 8 paramètres précités sont simultanément fixés à zéro (Figure 3.10(b)). Notons que, lorsque les déplacements sont extraits de solutions analytiques, tous ces paramètres sont inférieurs à 10^{-16} .

En conclusion, l'analyse proposée dans cette section a mis en évidence l'influence des imprécisions numériques introduites dans les déplacements sur la précision des fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8. Il est montré que, malgré ces imprécisions, les paramètres significatifs caractéristiques des 4 cas de chargement étudiés sont correctement déterminés, quel que soit l'ordre des fonctions analysé. Par contre, la détermination des autres paramètres, i.e. ceux qui doivent être théoriquement nuls, est plus approximative. Si à l'ordre 4 cette approximation n'influe pas sur le calcul des champs de déplacements et de contraintes, elle génère cependant des perturbations dans les champs reconstruits à l'ordre 8. Ces perturbations sont, en fait, dues à l'influence de quelques paramètres, qui apparaissent pourtant négligeables, mais qui ajoutent à la solution la contribution de modes parasites. Toutefois, ces perturbations sont très localisées, les champs reconstruits sont globalement cohérents avec le cas de chargement et sont, en particulier, précis au voisinage de la perforation.

3.4.2 Discussion sur l'amélioration de la précision des fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8

Afin d'améliorer la précision des fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8, et donc la reconstruction des champs de contraintes et de déplacements, deux possibilités peuvent être envisagées. D'une part, le conditionnement du système linéaire associé peut être amélioré, et d'autre part, une sélection des paramètres les plus significatifs peut être effectuée de façon à écarter les modes parasites.

Tout d'abord, pour améliorer le conditionnement du système linéaire associé aux fonctions calculées à l'ordre 8, $\mathbf{A}_{ls}\mathbf{c} = \mathbf{b}_{ls}$, une méthode de *préconditionnement* peut être appliquée. Cette méthode, dont le principe est détaillé dans l'Annexe F, consiste à résoudre un système linéaire équivalent au système initial qui fait intervenir une matrice \mathbf{C} appelée matrice de préconditionnement ou préconditionneur. L'efficacité de la méthode repose complètement sur le choix d'un bon préconditionneur, i.e. sur le choix d'une matrice \mathbf{C} qui est telle que le conditionnement de $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{ls}$ est largement inférieur à celui

9. Les valeurs prises par les paramètres significatifs dans cette étude sont : $\alpha_{-1} = 12.85$ et $\alpha_1 = 6.79$ pour le cas de la traction uniaxiale, et $\alpha_1 = 17.64$ pour le cas de la traction biaxiale.

de \mathbf{A}_{ls} . Il existe plusieurs types de préconditionneurs ; une liste non exhaustive de préconditionneurs couramment utilisés en analyse numérique est présentée en Annexe F. Parmi ceux-là, deux types de préconditionneur ont été testés : le préconditionneur de Jacobi (Équation (F.2)), et le préconditionneur SSOR (Équation (F.5)). L'influence de ces deux méthodes de préconditionnement sur l'identification des paramètres (α_j, β_j) et sur la reconstruction des champs, est donc étudiée. La configuration $\{8/8/8\}$ pour un cas de cisaillement pur est, en particulier, analysée. En effet, il s'agit de la configuration de prélèvement qui nous intéresse particulièrement car la position des points de prélèvement est identique à la position des nœuds du super-élément visé. En plus, c'est une configuration où des perturbations sont observées sur les champs mécaniques réinterpolés.

Les paramètres identifiés avec le préconditionneur de Jacobi sont identiques à ceux identifiés avec le système linéaire initial. Le même phénomène est observé avec le préconditionneur SSOR où plusieurs valeurs du paramètre de relaxation ω ont été testées. De plus, quelle que soit la méthode testée, le conditionnement de la matrice $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{ls}$ est du même ordre de grandeur que celui de la matrice \mathbf{A}_{ls} . Aucune amélioration n'est donc observée sur la reconstruction des champs, que ce soit avec un préconditionneur SSOR ou de Jacobi. Des études plus poussées doivent être mises en œuvre pour rechercher et déterminer la méthode de préconditionnement la plus adaptée et la plus efficace.

Une autre technique pour améliorer la précision des fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8 consisterait à sélectionner uniquement les paramètres les plus significatifs pour la reconstruction de la solution. En effet, on a vu que les paramètres responsables des écarts localisés dans les champs reconstruits étaient des paramètres proches de zéro qui sont négligeables par rapport aux paramètres significatifs représentatifs du chargement. Une sélection des paramètres significatifs permettrait donc d'écarter les modes parasites associés à ces paramètres lors de la réinterpolation des champs. Une méthode, dite de bases réduites, pourrait être particulièrement intéressante pour traiter cette problématique.

Une méthode de bases réduites est une méthode de réduction de modèles qui consiste à diminuer le nombre de degrés de liberté. L'objectif de cette méthode est de réduire les temps de calcul nécessaires à la résolution de problèmes pouvant être très complexes. En pratique, il s'agit de rechercher la solution du problème dans un espace dont la base est constituée de fonctions qui tiennent compte de la « physique » du problème, appelée base réduite, et dont leur nombre est très inférieur à celui des fonctions de formes d'une approximation par EF [104]. La solution ainsi obtenue est alors décrite comme une somme de modes. Il existe différentes méthodes pour construire la base réduite. Parmi elles, nous nous intéressons en particulier à la POD, i.e. la *Proper Orthogonal Decomposition*. La POD a été initialement introduite par Lumley [105] dans le domaine de la mécanique des fluides dans le but d'extraire des structures cohérentes dans les écoulements turbulents jugées essentielles pour décrire le phénomène [106]. Cette méthode a également été redécouverte, de façon indépendante, par d'autres auteurs dans différents domaines, autres que

α_{-7}	α_{-6}	α_{-5}	α_{-4}	α_{-3}	α_{-2}	α_{-1}	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
β_{-7}	β_{-6}	β_{-5}	β_{-4}	β_{-3}	β_{-2}	β_{-1}	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8

 FIGURE 3.11 – Schéma (paramètres parasites en **gras**).

la mécanique des fluides. La POD est donc connue sous d'autres noms comme *Karhunen-Loève Decomposition*, ou encore *Principal Component Analysis* [107], et est fortement liée à la *Singular Value Decomposition* [108]. Cette méthode est particulièrement intéressante car elle permet de déterminer une base de modes représentatifs des réalisations les plus probables, à partir d'un ensemble de données expérimentales ou provenant de simulations numériques¹⁰. Cette base a la particularité d'être optimale d'un point de vue énergétique, c'est-à-dire que seul un petit nombre de modes permet de capturer la quasi-totalité de l'énergie¹¹, ce qui permet par conséquent d'obtenir une bonne représentation du champ que l'on cherche à approcher avec peu de modes. Les fonctions de la base POD sont en fait déterminées en résolvant un problème aux valeurs propres, ainsi la contribution de chacun des modes propres dans le système peut être estimée grâce aux valeurs propres associées. Selon Kerschen *et al.* [110], ceci permet de ne conserver que les modes dominants et de filtrer la présence de bruits qui sont souvent associés aux valeurs propres les plus petites. Cette caractéristique de la POD apparaît comme une solution clé pour améliorer la réinterpolation des champs de contraintes et de déplacements calculés à l'ordre 8.

La mise en place de cette méthode n'est pas triviale. Étant donné qu'elle ne représente pas un des axes de recherche majeur de ces travaux de thèse, il a donc été choisi dans ce manuscrit de restreindre l'ordre des fonctions à 4 pour la réinterpolation des champs de contraintes et de déplacements. Autrement dit, il s'agit de considérer 16 paramètres pour la réinterpolation des champs (i.e., ceux entourés par un trait pointillé dans la Figure 3.11) au lieu des 32 paramètres initiaux (i.e., ceux entourés par un trait plein dans la Figure 3.11) de façon à écarter les modes parasites (i.e., ceux écrits en gras dans la Figure 3.11). Il est important de préciser que l'ordre des fonctions d'interpolation pour le calcul de la matrice de rigidité est toujours fixé à 8, seule la réinterpolation des champs est concernée par la restriction du nombre de paramètres (α_j, β_j) .

10. Une méthode classiquement utilisée pour la construction des fonctions de la base POD est la méthode des *Snapshots* développée par Sirovich [109].

11. La contribution de chaque mode au champ est estimé *via* un critère énergétique [106].

3.5 Synthèse

Les fonctions d'interpolation du nouveau super-élément perforé avec nœuds sur la perforation ont été évaluées dans ce chapitre. Pour ce faire, la méthode de reconstruction de champs proposée par Leconte *et al.* [10] a été généralisée et adaptée de manière à pouvoir considérer un ordre de troncature et un nombre de points de prélèvement (sur le carré ou sur la perforation) génériques. Plusieurs configurations de prélèvement ainsi que deux ordres de troncature spécifiques, 4 et 8, ont été analysées. La première analyse menée à partir de solutions de référence analytiques a montré que les fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8 étaient moins précises que celles calculées à l'ordre 4. Une légère diminution de la précision des fonctions est, en effet, observée avec l'augmentation de l'ordre mais les champs de contraintes et de déplacements reconstruits restent cependant très précis. Ce phénomène, qui est également observé dans la littérature, semble toutefois contre-intuitif ; une analyse plus approfondie sur l'origine de cette sensibilité des fonctions d'interpolation avec l'augmentation de l'ordre a donc été réalisée. Il en résulte que la matrice du système linéaire établi pour identifier les paramètres (α_j, β_j) de la solution est moins bien conditionnée à l'ordre 8 qu'à l'ordre 4. Pour illustrer l'influence de ce mauvais conditionnement sur la précision des fonctions calculées à l'ordre 8, une seconde analyse a, par conséquent, été menée en considérant cette fois-ci des solutions de référence numériques. Cette approximation, introduite dans les déplacements prélevés, a effectivement une influence sur l'identification des paramètres (α_j, β_j) et sur la reconstruction des champs mécaniques lorsque l'ordre est égal à 8. Les résultats obtenus sont globalement cohérents avec les cas de chargements analysés, et sont très précis au voisinage de la perforation en particulier. Des écarts localisés au voisinage de certains points du contour extérieur du domaine perforé, d'amplitude parfois importante, sont toutefois observés sur deux configurations en particulier. Ces écarts sont dus à l'influence de paramètres proches de zéro, présents à l'ordre 8 mais pas à l'ordre 4, qui apparaissent négligeables devant les paramètres significatifs représentatifs des chargements étudiés. La contribution de modes parasites est ainsi ajoutée à la solution, ce qui provoque les écarts observés. Des techniques pour améliorer la précision des fonctions calculées à l'ordre 8 sont finalement proposées. D'une part, des méthodes de préconditionnement sont présentées pour améliorer le conditionnement du système linéaire. D'autre part, des méthodes de réduction de modèles de type POD sont proposées dans le but de pouvoir sélectionner uniquement les paramètres significatifs, lors de la réinterpolation des champs, et ainsi écarter les modes parasites qui perturbent la solution. La mise en place de ces méthodes n'étant pas triviale, il est proposé de restreindre la réinterpolation des champs à 16 paramètres, i.e. ceux associés à l'ordre 4, dans la suite de ce manuscrit.

Les fonctions d'interpolation du nouveau super-élément perforé à 16 nœuds ont été analysées et les résultats de cette analyse ne sont pas jugés comme étant un obstacle pour la suite des développements. L'élément est donc maintenant implémenté dans le code de

calcul éléments finis ZéBuLoN, et est validé pour différents cas de chargement externes et internes.

Chapitre 4

Implémentation et évaluation du super-élément perforé avec nœuds sur la perforation

L'implémentation et la validation du super-élément perforé, formulé précédemment, font l'objet de ce chapitre. Dans un premier temps, les outils nécessaires à l'implémentation du nouveau super-élément dans le code EF ZéBuLoN sont présentés. Les algorithmes de calcul pour la matrice de rigidité et les forces externes, ainsi que l'intégration du code du super-élément dans le code principal sont également détaillés. Dans un second temps, le nouveau super-élément perforé est évalué. Sa capacité à localiser les champs au voisinage du trou, sa précision et son efficacité sont étudiées. Il est d'abord vérifié que les champs mécaniques sont correctement et précisément calculés lorsque seuls des chargements externes sont considérés, aucune force n'étant appliquée sur la perforation du super-élément. Enfin, le super-élément est évalué lorsqu'un chargement interne est appliqué sur la perforation. Une pression constante uniformément répartie sur le contour du trou du super-élément est analysée. Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec un maillage raffiné au voisinage de la perforation.

Les premières analyses montrent que le super-élément à 16 nœuds est validé pour des chargements externes. Parmi les règles d'intégration analysées, celle à 4 points de Gauss donne les meilleurs résultats. Il est également montré que les résultats obtenus avec une réinterpolation à l'ordre 8 sont cohérents avec les conclusions du Chapitre 3 (imprécisions numériques dans les déplacements nodaux introduisant un biais dans les champs reconstruits). L'évaluation du super-élément, lorsque sa perforation est soumise à une pression constante et uniforme, met en évidence des incohérences dans les déplacements nodaux calculés (e.g., signe opposé, ordres de grandeur incorrects). Cependant, le respect de la symétrie du chargement, de proportions entre les déplacements nodaux, ou encore le caractère systématique des erreurs observées sont encourageants.

Table des matières

4.1	Introduction	100
4.2	Implémentation du super-élément perforé avec nœuds sur la perforation dans le code ZéBuLoN	100
4.3	Évaluation du nouveau super-élément perforé	107
4.4	Synthèse	133

4.1 Introduction

Le super-élément fini perforé, formulé dans le Chapitre 2, qui comporte 16 nœuds dont 8 sur la perforation (Figure 2.2) a été implémenté, en collaboration avec la cellule numérique du département DMSM de l’Onera¹, dans le code de calcul éléments finis implicite ZéBuLoN² [111]. Son implémentation est basée sur celle du super-élément perforé à 8 nœuds qui ne comporte pas de nœuds internes [94]. Les modifications et outils supplémentaires développés nécessaires à la création des 8 nœuds de la perforation et à la création de la frontière du trou sont décrits dans la Section 4.2. Le nouveau super-élément implémenté est, ensuite, évalué dans la Section 4.3 pour des chargements externes et internes.

4.2 Implémentation du super-élément perforé avec nœuds sur la perforation dans le code ZéBuLoN

Le code ZéBuLoN, programmé en C++, utilise la programmation orientée objet, ainsi qu’un système de *plugins*. De cette manière, le super-élément est codé de façon complètement séparée du code principal (code non-intrusif). La Figure 4.1 montre la façon dont le code associé au super-élément s’inscrit dans la structure globale du code ZéBuLoN. Les différents outils développés pour l’implémentation du super-élément avec nœuds sur la perforation, qui apparaissent notamment dans les Figures 4.1 et 4.2, sont les suivants :

- La classe³ HYBRID_TREFFTZ_INT, qui est la classe principale où le super-élément est implémenté, a été créée. Elle dérive d’une classe mère⁴ appe-

1. Département des Matériaux et Structures Métalliques.

2. ZéBuLoN est conjointement développé par le Centre des Matériaux (Mines ParisTech), l’Onera, et NorthWest Numerics.

3. Définition des concepts de la programmation orientée objet : Un *objet* est une entité qui regroupe des données membres et des fonctions membres appelées méthodes. Une *méthode* est une fonction qui s’applique à l’objet et ses données membres auxquels elle est associée. Enfin, une *classe* décrit un ensemble d’objets ayant une structure de données commune et disposant des mêmes méthodes. Elle définit, en fait, un type d’objet où chaque objet est appelé une *instance* de sa classe.

4. Définition des concepts de la programmation orientée objet : La notion d’héritage permet de définir une nouvelle classe (appelée classe *filie*) à partir d’une classe existante (appelée classe *mère*) en ajoutant des nouvelles données et/ou méthodes membres.

lée `D_ELEMENT` dont plusieurs méthodes, dites virtuelles⁵, ont été redéfinies : `setup_dofs`, `initialize_element`, et `internal_reaction` (Figure 4.1). La méthode `initialize_element` correspond à l'initialisation du super-élément. C'est, en particulier, dans cette méthode que les nœuds internes et la frontière interne sont créés (Figure 4.2). La frontière interne est définie à partir des nœuds internes comme l'union de quatre frontières quadratiques. La méthode `internal_reaction` correspond au calcul de la matrice de rigidité du nouveau super-élément \mathbf{K} qui est décrit dans l'Algorithme 1. D'autres méthodes ont dû être également redéfinies comme le calcul du nombre de nœuds du super-élément `nb_node()` et l'accès à un nœud du super-élément `get_node(int i)` afin de prendre en compte les nœuds supplémentaires dans tout le reste du code.

- En plus de la nouvelle classe `HYBRID_TREFFTZ_INT`, une classe `HYBRID_TREFFTZ_PBC` dérivant de la classe `PROBLEM_COMPONENT` a été codée. Cette dernière est en fait une classe de base, dont la plupart des méthodes sont virtuelles, ce qui permet d'intervenir et de définir des actions à certains endroits clés du code (e.g., au début du calcul, après le chargement du maillage, en début et en fin d'incrément, etc.). Ce mécanisme a permis la création des DOFS associés aux nœuds de la perforation du super-élément *via* la redéfinition de la fonction `pre_create_dof()` dans la classe `HYBRID_TREFFTZ_PBC`. Sans ce mécanisme, les DOFS associés aux nœuds de la perforation n'interviennnent pas dans le vecteur des DOFS du système global, et n'interviennnent donc pas dans le calcul.
- Une classe annexe contenant des informations spécifiques à l'élément, appelée `HYBRID_TREFFTZ_INT_GEOM_INFO` qui hérite de la classe de base `GEOMETRY_INFO`, a également été implémentée afin de stocker et renvoyer certaines informations nécessaires au calcul. Par exemple, le rayon de la perforation du super-élément r_0 , la constante de Muskhelishvili k , le module de cisaillement μ , ou encore le nombre de points de Gauss par côté sont des informations accessibles *via* cette classe.

Un outil supplémentaire spécifique à l'élément `HYBRID_TREFFTZ_INT` pour la prise en compte de chargements particuliers appliqués à la perforation a été développé :

- Un nouveau type de condition aux limites spécifique au super-élément a été créé, il s'agit de la classe `TREFFTZ_<CLPERFO>_BC` où `<CLPERFO>` correspond à une condition aux limites particulière appliquée à la perforation. Elle permet de calculer

5. Si une méthode est déclarée (ou déclarée et définie) dans une classe dite « mère » comme étant *virtuelle*, alors cette même méthode (même nom, même signature) peut être définie (ou redéfinie) dans toutes les classes dites « fille » qui héritent de la classe mère. Si la méthode a été initialement implémentée dans la classe mère, elle peut toujours être utilisée grâce à l'opérateur `::`, et en particulier dans l'implémentation de la nouvelle définition de la méthode. C'est, d'ailleurs, ce qui est fait dans la méthode `HYBRID_TREFFTZ_INT::initialize_element` qui utilise la méthode implémentée dans sa classe mère `D_ELEMENT::initialize_element` (cf. Figure 4.2).

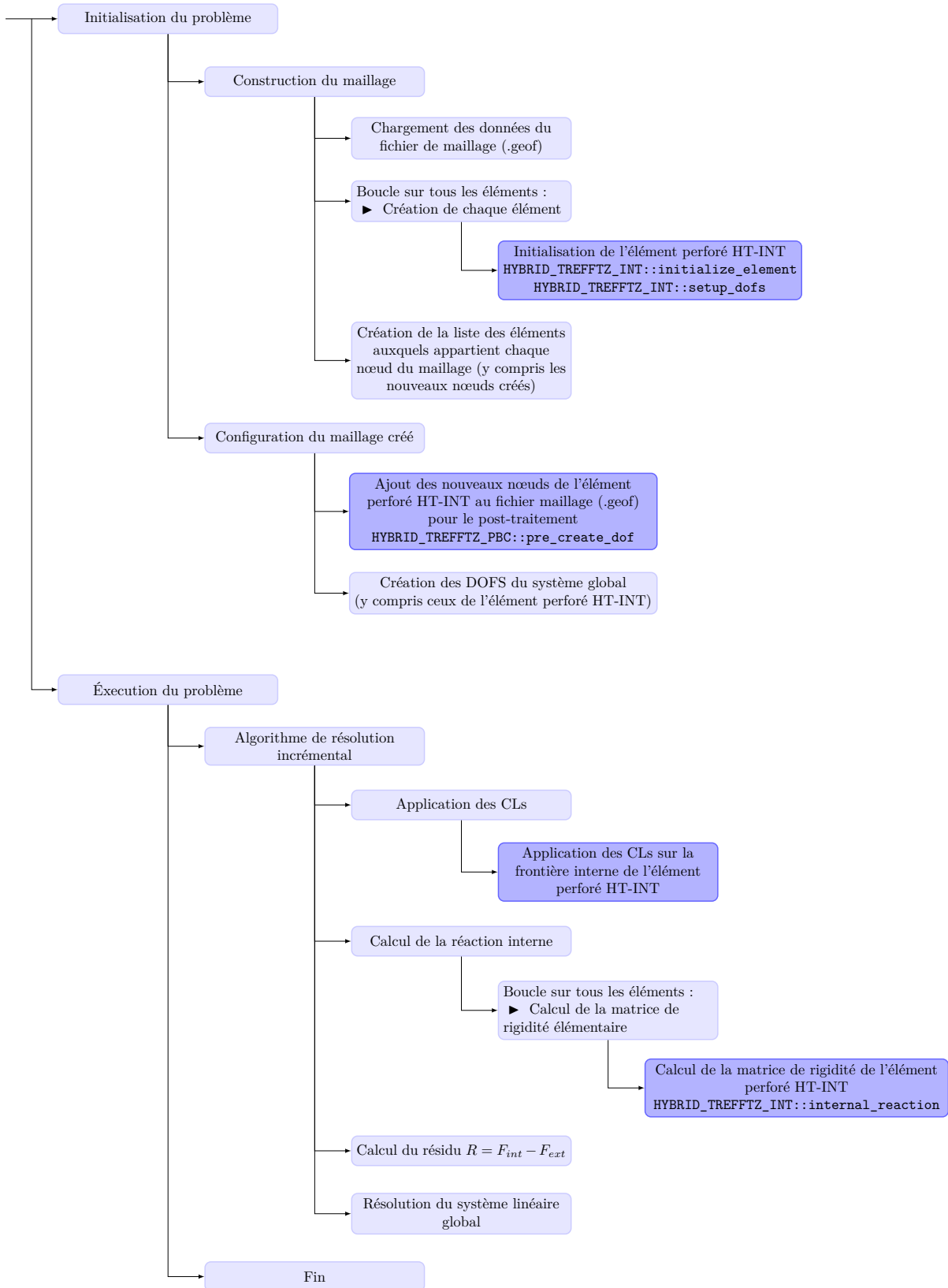


FIGURE 4.1 – Implémentation du super-élément perforé avec nœuds internes (HT-INT) dans l'architecture du code ZéBuLoN : plugin ■, code principal ■.

Algorithme 1 Calcul de la matrice de rigidité du super-élément perforé à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur sa perforation.

Entrées : coordonnées des nœuds $(x_i, y_i)_{i=1\dots 16}$, rayon de la perforation r_0 , propriétés matériau k et μ , règle d'intégration de Gauss 1D à N_{GP} points

Sortie : Matrice de rigidité élémentaire \mathbf{K}

Début

► Calcul de la matrice \mathbf{N}_e :

Pour $i = 1$ à 16 **faire**

Calcul de la matrice \mathbf{N} au nœud n° i de coordonnées (x_i, y_i)

Fin Pour

$$\mathbf{N}_e = \left[\mathbf{N}^t(x_1, y_1) \mid \dots \mid \mathbf{N}^t(x_n, y_n) \right]^t$$

► Calcul des matrices \mathcal{H} et \mathcal{L} (Équations (2.3.9) et (4.2.1)) :

$$\mathcal{H} = 0, \mathcal{L} = 0$$

Pour $seg = 1$ à 4 **faire**

Pour $i = 1$ à N_{GP} **faire**

Calcul de la matrice $\tilde{\mathbf{N}}$ au GP courant ξ_i^{seg}

Calcul des matrices \mathbf{N} et \mathbf{Q} au GP courant ξ_i^{seg}

Calcul de la normale extérieure unitaire $\tilde{\mathbf{n}}$ au segment n° seg au GP courant ξ_i^{seg}

Calcul de la matrice \mathbf{P}^t au GP courant ξ_i^{seg}

$$\mathcal{H}_{seg} = \mathbf{P}^t(\xi_i^{seg}) \mathbf{N}(\xi_i^{seg}) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{seg} = \mathbf{P}^t(\xi_i^{seg}) \tilde{\mathbf{N}}(\xi_i^{seg})$$

► Ajout de la contribution du GP courant :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} + w_i^{seg} \mathcal{H}_{seg} \quad \text{et} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L} + w_i^{seg} \mathcal{L}_{seg} \quad \text{où } w_i^{seg} \text{ est le poids associé au GP courant } \xi_i^{seg}$$

Fin Pour

Fin Pour

► Calcul des matrices \mathbf{H} et \mathbf{L} :

$$\mathbf{H} = (\mathbf{N}_e^{-1})^t \mathcal{H} \mathbf{N}_e^{-1}$$

$$\mathbf{L} = (\mathbf{N}_e^{-1})^t \mathcal{L}$$

► Décomposition de \mathbf{H} et \mathbf{L} en matrices blocs (Équation (2.5.1)) et calcul des matrices \mathbf{W}_{11} , \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 , et \mathbf{A} (Équations (2.5.4) et (2.5.8))

► Calcul de la matrice de rigidité élémentaire \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)$$

Fin

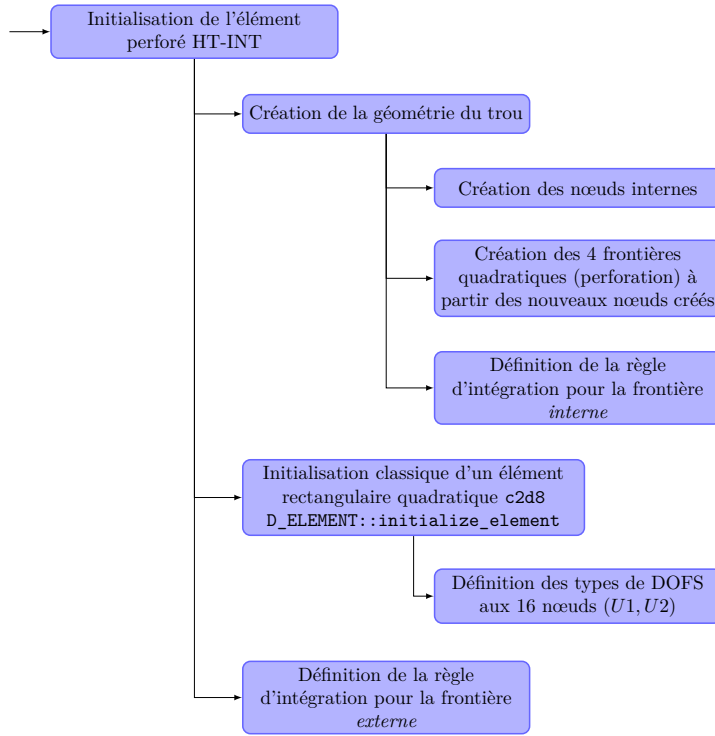


FIGURE 4.2 – Initialisation du super-élément perforé avec nœuds internes.

les forces externes (second membre \mathbf{f}) appliquées au super-élément perforé, qui sont dues au chargement de la perforation, au travers d'une solution analytique particulière. Par exemple, la classe `TREFFTZ_PRESSURE_BC` a été créée pour traiter le cas de la pression constante appliquée uniformément sur le contour de la perforation du super-élément. Le second membre \mathbf{f} associé au super-élément (Équation (2.5.9)) est finalement calculé au début de l'exécution du problème dans l'algorithme du code ZéBuLoN (Figure 4.1) et à chaque itération du calcul, à l'étape où toutes les conditions aux limites du problème sont appliquées. L'appel à la nouvelle classe `TREFFTZ_CLPERFO_BC` et aux différentes méthodes associées, effectué à cette étape, permet de calculer le vecteur \mathbf{f} (Algorithme 2).

Dès lors que la librairie associée à ces nouveaux objets est chargée, les nouvelles classes sont connues du code et peuvent notamment être utilisées dans le fichier de données `.inp`, qui est le fichier où le problème EF à analyser est défini. Par exemple, l'application d'un chargement sur la perforation d'un super-élément se fait par la commande `**impose_trefftz_clperfo_bc` dans laquelle le numéro de l'élément `HYBRID_TREFFTZ_INT` concerné et les données relatives au chargement sont spécifiés. Un exemple de fichier `.inp` dans le cas où un super-élément est soumis à une pression constante uniforme appliquée à sa perforation est montré dans l'Annexe G.

Le post-traitement de l'élément n'est quant à lui pas intégré à ZéBuLoN. La reconstruction des champs à l'intérieur du super-élément est externalisée, de la même manière que le

Algorithme 2 Calcul des forces externes \mathbf{f} dues à l'application d'un chargement sur la perforation du super-élément perforé à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur sa perforation.

Entrées : élément HT-INT (coordonnées des nœuds $(x_i, y_i)_{i=1\dots 16}$, rayon de la perforation r_0 , propriétés matériau k et μ , règle d'intégration de Gauss 1D à N_{GP} points)

Sortie : Forces externes \mathbf{f}

Début

► Calcul des vecteurs \mathcal{R}^c et \mathcal{R}^d (Équation (2.3.9)) :

$\mathcal{R}^c = 0, \mathcal{R}^d = 0$

// Intégration numérique sur la frontière externe S_i

Pour $seg = 1$ à 4 **faire**

Pour $i = 1$ à N_{GP} **faire**

 Calcul de la solution particulière \mathbf{u}^p et $\boldsymbol{\sigma}^p$ au GP courant ξ_i^{seg}

 Calcul de la matrice $\tilde{\mathbf{N}}$ au GP courant ξ_i^{seg}

 Calcul des matrices \mathbf{N} et \mathbf{Q} au GP courant ξ_i^{seg}

 Calcul de la normale extérieure unitaire $\tilde{\mathbf{n}}$ au segment n° seg au GP courant ξ_i^{seg}

 Calcul de la matrice \mathbf{P}^t au GP courant ξ_i^{seg}

 Calcul du vecteur \mathbf{T}^p au GP courant ξ_i^{seg}

$\mathcal{R}_{seg}^c = \mathbf{P}^t(\xi_i^{seg}) \mathbf{u}^p(\xi_i^{seg}) + \mathbf{N}^t(\xi_i^{seg}) \mathbf{T}^p(\xi_i^{seg})$ et $\mathcal{R}_{seg}^d = \tilde{\mathbf{N}}(\xi_i^{seg}) \mathbf{T}^p(\xi_i^{seg})$

 ► Ajout de la contribution du GP courant :

$\mathcal{R}^c = \mathcal{R}^c + w_i^{seg} \mathcal{R}_{seg}^c$ et $\mathcal{R}^d = \mathcal{R}^d + w_i^{seg} \mathcal{R}_{seg}^d$ où w_i^{seg} est le poids associé au GP courant ξ_i^{seg}

Fin Pour

Fin Pour

// Intégration numérique sur la frontière interne S_p

Pour $seg = 1$ à 4 **faire**

Pour $i = 1$ à N_{GP} **faire**

 Projection du GP courant sur la perforation : calcul des coordonnées polaires du GP courant puis coordonnées radiale fixée à r_0

 Calcul de la solution particulière $\boldsymbol{\sigma}^p$ au GP courant ξ_i^{seg}

 Calcul de la matrice \mathbf{N} au GP courant ξ_i^{seg}

 Calcul de la normale extérieure unitaire $\tilde{\mathbf{n}}$ au segment n° seg au GP courant ξ_i^{seg}

 Calcul du vecteur \mathbf{T}^p au GP courant ξ_i^{seg}

$\mathcal{R}_{seg}^c = \mathbf{N}^t(\xi_i^{seg}) \mathbf{T}^p(\xi_i^{seg})$

 ► Ajout de la contribution du GP courant :

$\mathcal{R}^c = \mathcal{R}^c + w_i^{seg} \mathcal{R}_{seg}^c$ où w_i^{seg} est le poids associé au GP courant ξ_i^{seg}

Fin Pour

Fin Pour

► Calcul des vecteurs \mathbf{r}^c et \mathbf{r}^d :

$\mathbf{r}^c = (\mathbf{N}_e^{-1})^t \mathcal{R}^c$ // La matrice \mathbf{N}_e^{-1} a été calculée au préalable et est accessible via l'élément HT-INT

$\mathbf{r}^d = \mathcal{R}^d$

► Décomposition de \mathbf{r}^c en deux parties distinctes \mathbf{r}_{ext}^c et \mathbf{r}_{int}^c

► Calcul des forces externes $(\mathbf{f})_{i=1,\dots,32}$ pour tous les DOFS du super-élément (Équation (2.5.9))

// Les matrices \mathbf{G}_1 et \mathbf{G}_2 ont été calculées au préalable et sont accessibles via l'élément HT-INT

Fin

super-élément perforé sans nœuds internes, *via* une méthode standard de reconstruction de champs (Section 1.5.5). Les champs de déplacements et de contraintes dans le nouveau super-élément sont donc reconstruits à partir de la valeur des déplacements prélevés aux 16 nœuds. La numérotation des nœuds du super-élément dans le code ZéBuLoN est fixée suivant la Figure 4.3.

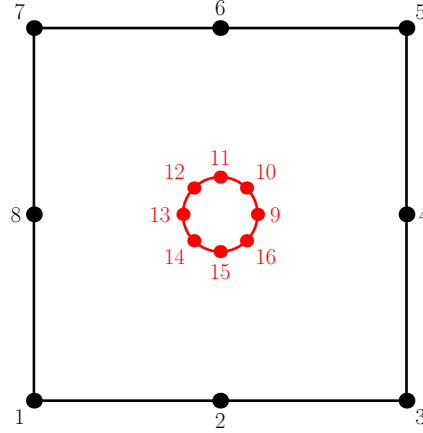


FIGURE 4.3 – Numérotation des nœuds du super-élément perforé à 16 nœuds dont 8 sur la perforation dans ZéBuLoN.

Les fonctions d'interpolation du super-élément à 16 nœuds qui comporte 8 nœuds sur sa perforation sont tronquées à l'ordre $N = M = 8$ pour le calcul de la matrice de rigidité. Le super-élément est compatible avec des éléments finis classiques quadratiques, ainsi le champ de déplacements inter-éléments est défini par l'Équation (2.3.2) (cf. Section 2.3.1). Les intégrales le long des frontières du super-élément sont évaluées numériquement en utilisant des formules de quadrature de Gauss qui sont extraites de la référence [112]. En ce qui concerne l'intégration numérique sur le contour de la perforation qui intervient uniquement dans le calcul du vecteur force et pas dans celui de la matrice de rigidité, il est important de rappeler que la perforation est définie comme l'assemblage de quatre frontières quadratiques. Par conséquent, les points de Gauss situés le long de ces frontières ne sont pas exactement sur le cercle qui correspond au contour de la perforation, et donc certains d'entre eux se trouvent à l'intérieur du trou. Étant donné que les fonctions d'interpolation sont définies dans le plan privé du disque correspondant à la perforation, les points de Gauss sont, dans ce cas, projetés sur le cercle suivant la normale au contour. Le calcul de la matrice \mathcal{H} , qui intervient dans le calcul de la matrice de rigidité \mathbf{K} du super-élément perforé (Équation (2.3.9)), est donc approché par l'expression donnée dans l'Équation (4.2.1). Le procédé est le même pour le calcul de \mathcal{L} , mais aussi pour le calcul des vecteurs \mathcal{R}_i^c et \mathcal{R}_i^d qui composent le vecteur force \mathbf{f} et qui font, en particulier, intervenir

des intégrales sur S_p (Équation (2.3.9)).

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \int_{S_i} \mathbf{P}^t \mathbf{N} \, dS \\
 &= \sum_{seg=1}^4 \left(\int_{S_{seg}} \mathbf{P}^t \mathbf{N} \, dS \right) \\
 &\approx \sum_{seg=1}^4 \left(\sum_{i=1}^{N_{GP}} w_i^{seg} \mathbf{P}^t(\xi_i^{seg}) \mathbf{N}(\xi_i^{seg}) \right)
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

où la frontière S_i est décomposée en quatre segments S_{seg} qui correspondent aux quatre frontières quadratiques constituant S_i , N_{GP} est le nombre de points de Gauss choisis pour chaque côté du super-élément S_{seg} , et (ξ_i^{seg}, w_i^{seg}) correspondent aux coordonnées du i -ème point de Gauss du segment S_{seg} et aux poids associés.

Notons que les coordonnées des points de Gauss correspondent aux coordonnées réelles situées sur la frontière quadratique réelle (i.e., élément 1D quadratique à 3 nœuds) et non aux coordonnées de référence situées sur la frontière quadratique de référence (i.e., élément quadratique 1D à 3 nœuds compris entre -1 et 1). La notion de changement de variable $\int_{S_{seg}} \langle . \rangle \, dS = \int_{-1}^1 \langle . \rangle \det J \, dS$ où J est la matrice jacobienne de la transformation (élément 1D quadratique de référence \rightarrow élément 1D quadratique réel), qui permet l'utilisation des règles d'intégration de Gauss, est en fait sous-entendue dans le code. En effet, cela est sous-entendu à chaque fois que la contribution de chaque point de Gauss est ajoutée, et au travers du fait que les fonctions d'interpolation sont calculées aux coordonnées réelles des points de Gauss.

4.3 Évaluation du nouveau super-élément perforé

Le super-élément perforé avec nœuds internes étant maintenant implémenté, il s'agit désormais d'évaluer la formulation proposée. Cette évaluation consiste en deux étapes. Tout d'abord, la première étape consiste à vérifier que les champs de contraintes et de déplacements sont correctement et précisément calculés lorsque seuls des chargements externes sont considérés, et donc lorsqu'aucune force n'est appliquée sur le contour de la perforation du super-élément. Ensuite, pour la deuxième étape, il s'agit de considérer uniquement un chargement appliqué sur le contour de la perforation. Le cas d'une pression constante uniformément répartie sur le contour du trou, dont la solution est donnée dans la référence [50] et rappelée dans la Section 1.5.4, sera analysé en particulier. Les résultats obtenus avec le super-élément seront comparés à des résultats de référence.

4.3.1 Chargement externe

La première étape de validation consiste à vérifier la non-régression des résultats, lorsque des nœuds supplémentaires sont formulés sur la perforation, par rapport aux résultats fournis par le super-élément perforé existant à 8 nœuds. Par conséquent, il est question, dans cette section, de vérifier que les nœuds de la perforation se déplacent correctement et que les champs de contraintes et de déplacements sont correctement et précisément calculés lorsque seuls des chargements externes sont considérés. Pour cela, les résultats obtenus avec le super-élément à 16 nœuds sont, non seulement, comparés à des résultats de référence numériques fournis par un modèle EF fin, mais aussi, aux résultats obtenus avec le super-élément perforé à 8 nœuds, déjà validé [10].

L'étude des fonctions d'interpolation du super-élément perforé réalisée dans le Chapitre 3 a montré qu'une reconstruction des champs dans le domaine perforé était moins précise lorsqu'elles sont tronquées à l'ordre 8 (i.e., lorsque 32 paramètres doivent être identifiés) que lorsqu'elles sont tronquées à l'ordre 4 (i.e., lorsque seuls 16 paramètres doivent être identifiés). Par conséquent, même s'il n'est pas naturel que l'ordre des fonctions d'interpolation pour la réinterpolation soit inférieur à celui utilisé dans le calcul de la matrice de rigidité, il est proposé, dans un premier temps, d'évaluer le super-élément en considérant une réinterpolation avec 16 paramètres (i.e., à l'ordre 4). Dans cette étude, la même règle d'intégration que celle utilisée pour le super-élément perforé à 8 nœuds est choisie, i.e. une règle de Gauss à 4 points par côté⁶ (Section 4.3.1.1). Dans un deuxième temps, l'influence du nombre de points d'intégration sur la précision du super-élément est étudiée (Section 4.3.1.2). Finalement, une réinterpolation des champs à partir de 32 paramètres (i.e., à l'ordre 8) est proposée (Section 4.3.1.3).

4.3.1.1 Réinterpolation des champs à partir de 16 paramètres et règle d'intégration à 4 points de Gauss par côté

Afin d'évaluer le nouveau super-élément perforé avec nœuds sur sa perforation pour des chargements externes, une plaque perforée comportant un trou circulaire centré de rayon r_0 soumise à différents chargements est considérée. Les conditions aux limites appliquées à la plaque perforée sont la traction uniaxiale, la traction biaxiale, le cisaillement pur ou le cisaillement simple. Les propriétés matériau et les caractéristiques géométriques de la

6. Les frontières externe et interne du super-élément sont définies comme étant l'union de quatre frontières quadratiques. Si une règle d'intégration à 4 points par frontière quadratique est choisie, alors le nombre total de points de Gauss pour le nouveau super-élément perforé est de 32 points. Notons que lorsqu'aucun chargement n'est appliqué à la perforation du super-élément, seules des intégrations sur sa frontière externe sont effectuées dans le calcul, ainsi le nombre total de points de Gauss est de 16 points.

plaque perforée sont identiques à celles déjà présentées dans la Section 3.4. Les différents cas-tests sont analysés, d'une part, avec un maillage adapté aux calculs de structures qui consiste en 49 EF seulement (Figure 4.4) : 1 super-élément perforé au centre de la plaque, qui est soit le super-élément à 16 nœuds (Figure 2.2), soit le super-élément à 8 nœuds (Figure 1.17(a)), entouré de 48 EF rectangulaires quadratiques. D'autre part, les quatre cas-tests sont également analysés avec un maillage EF fin constitué de 12 000 EF rectangulaires quadratiques (Figure 3.7). La taille de maille à proximité de la perforation est de l'ordre de $1/10$ du rayon de la perforation afin de prédire les concentrations de contraintes avec précision. Les résultats obtenus avec ce modèle sont considérés comme étant les résultats de référence. Par exemple, la distribution de la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} obtenue avec le maillage EF fin pour chaque cas de chargement est montrée dans la Figure 4.5, et le déplacement u_x est illustré en Annexe H dans la Figure H.1.

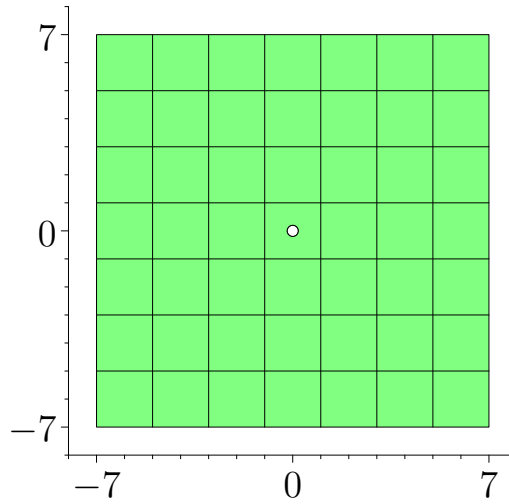


FIGURE 4.4 – Maillage EF « grossier » contenant un super-élément perforé au centre.

Les déplacements nodaux obtenus avec le super-élément à 16 nœuds (i.e., données de sortie du calcul ZéBuLoN) sont comparés aux déplacements nodaux fournis par le maillage EF fin (référence), mais aussi à ceux obtenus par le super-élément à 8 nœuds. Les valeurs (u_x, u_y) aux 16 nœuds sont données dans les Tableaux 4.1, 4.2, 4.3, et 4.4 pour les cas de chargements de traction uniaxiale, traction biaxiale, cisaillement pur, et cisaillement simple, respectivement (voir la Figure 4.3 pour la numérotation des nœuds). Notons que pour le super-élément à 8 nœuds, les déplacements aux positions des 8 nœuds internes sont calculés en utilisant ses fonctions d'interpolation (i.e., tronquées à $N = M = 4$).

Il est intéressant d'observer que les symétries caractéristiques des différents cas de chargement étudiés ne sont pas exactement respectées par le super-élément à 16 nœuds, alors qu'elles le sont toujours par le maillage EF fin ou par le super-élément à 8 nœuds. Par exemple, dans le cas de la traction uniaxiale, le déplacement u_x au nœud n° 10 est égal

Tableau 4.1 – Déplacements (u_x, u_y) aux 16 nœuds pour la traction uniaxiale (mm).

Nœud	Référence (EF fins)		Super-élément à 8 nœuds		Super-élément à 16 nœuds	
	u_x	u_y	u_x	u_y	u_x	u_y
1	$-1.8168e^{-3}$	$4.7820e^{-4}$	$-1.8196e^{-3}$	$4.7429e^{-4}$	$-1.8194e^{-3}$	$4.7494e^{-4}$
2	$-7.6610e^{-16}$	$5.7699e^{-4}$	$6.6407e^{-19}$	$5.4604e^{-4}$	$-2.3605e^{-8}$	$5.4613e^{-4}$
3	$1.8168e^{-3}$	$4.7820e^{-4}$	$1.8196e^{-3}$	$4.7429e^{-4}$	$1.8193e^{-3}$	$4.7501e^{-4}$
4	$1.9552e^{-3}$	$8.7593e^{-16}$	$1.9147e^{-3}$	$-7.8059e^{-19}$	$1.9153e^{-3}$	$2.8109e^{-8}$
5	$1.8168e^{-3}$	$-4.7820e^{-4}$	$1.8196e^{-3}$	$-4.7429e^{-4}$	$1.8194e^{-3}$	$-4.7493e^{-4}$
6	$1.1388e^{-15}$	$-5.7699e^{-4}$	$4.8450e^{-19}$	$-5.4604e^{-4}$	$3.0651e^{-8}$	$-5.4614e^{-4}$
7	$-1.8168e^{-3}$	$-4.7820e^{-4}$	$-1.8196e^{-3}$	$-4.7429e^{-4}$	$-1.8193e^{-3}$	$-4.7501e^{-4}$
8	$-1.9552e^{-3}$	$-8.8717e^{-16}$	$-1.9147e^{-3}$	$-1.2909e^{-18}$	$-1.9153e^{-3}$	$-2.6703e^{-8}$
9	$1.0623e^{-3}$	$1.0064e^{-10}$	$1.0399e^{-3}$	$1.9201e^{-19}$	$1.0668e^{-3}$	$-5.3161e^{-8}$
10	$7.5115e^{-4}$	$-2.3172e^{-4}$	$7.3556e^{-4}$	$-2.1760e^{-4}$	$7.5431e^{-4}$	$-2.3572e^{-4}$
11	$2.4094e^{-10}$	$-3.2782e^{-4}$	$1.7147e^{-19}$	$-3.0780e^{-4}$	$-5.3954e^{-8}$	$-3.3408e^{-4}$
12	$-7.5115e^{-4}$	$-2.3172e^{-4}$	$-7.3556e^{-4}$	$-2.1760e^{-4}$	$-7.5438e^{-4}$	$-2.3565e^{-4}$
13	$-1.0623e^{-3}$	$-5.0321e^{-11}$	$-1.0399e^{-3}$	$1.2323e^{-19}$	$-1.0668e^{-3}$	$5.2074e^{-8}$
14	$-7.5115e^{-4}$	$2.3172e^{-4}$	$-7.3556e^{-4}$	$2.1760e^{-4}$	$-7.5431e^{-4}$	$2.3572e^{-4}$
15	$2.0834e^{-11}$	$3.2782e^{-4}$	$1.4633e^{-19}$	$3.0780e^{-4}$	$5.1162e^{-8}$	$3.3408e^{-4}$
16	$7.5115e^{-4}$	$2.3172e^{-4}$	$7.3556e^{-4}$	$2.1760e^{-4}$	$7.5439e^{-4}$	$2.3565e^{-4}$

 Tableau 4.2 – Déplacements (u_x, u_y) aux 16 nœuds pour la traction biaxiale (mm).

Nœud	Référence (EF fins)		Super-élément à 8 nœuds		Super-élément à 16 nœuds	
	u_x	u_y	u_x	u_y	u_x	u_y
1	$-1.7315e^{-3}$	$-1.7315e^{-3}$	$-1.7348e^{-3}$	$-1.7348e^{-3}$	$-1.7337e^{-3}$	$-1.7338e^{-3}$
2	$-3.1116e^{-16}$	$-1.7934e^{-3}$	$1.6670e^{-18}$	$-1.7777e^{-3}$	$3.9290e^{-8}$	$-1.7787e^{-3}$
3	$1.7315e^{-3}$	$-1.7315e^{-3}$	$1.7348e^{-3}$	$-1.7348e^{-3}$	$1.7338e^{-3}$	$-1.7339e^{-3}$
4	$1.7934e^{-3}$	$3.1379e^{-16}$	$1.7777e^{-3}$	$3.1428e^{-19}$	$1.7783e^{-3}$	$-3.8152e^{-8}$
5	$1.7315e^{-3}$	$1.7315e^{-3}$	$1.7348e^{-3}$	$1.7348e^{-3}$	$1.7337e^{-3}$	$1.7338e^{-3}$
6	$3.2176e^{-16}$	$1.7934e^{-3}$	$1.0571e^{-18}$	$1.7777e^{-3}$	$-3.3212e^{-8}$	$1.7787e^{-3}$
7	$-1.7315e^{-3}$	$1.7315e^{-3}$	$-1.7348e^{-3}$	$1.7348e^{-3}$	$-1.7338e^{-3}$	$1.7339e^{-3}$
8	$-1.7934e^{-3}$	$-1.8200e^{-16}$	$-1.7777e^{-3}$	$2.1684e^{-19}$	$-1.7783e^{-3}$	$3.4387e^{-8}$
9	$9.5396e^{-4}$	$-2.9305e^{-10}$	$9.4878e^{-4}$	$2.8021e^{-19}$	$9.4981e^{-4}$	$7.2331e^{-8}$
10	$6.7456e^{-4}$	$6.7456e^{-4}$	$6.7110e^{-4}$	$6.7110e^{-4}$	$6.7220e^{-4}$	$6.7206e^{-4}$
11	$2.1637e^{-10}$	$9.5396e^{-4}$	$-6.9904e^{-20}$	$9.4878e^{-4}$	$6.8926e^{-8}$	$9.4962e^{-4}$
12	$-6.7456e^{-4}$	$6.7456e^{-4}$	$-6.7110e^{-4}$	$6.7110e^{-4}$	$-6.7210e^{-4}$	$6.7196e^{-4}$
13	$-9.5396e^{-4}$	$1.4652e^{-10}$	$-9.4878e^{-4}$	$6.9712e^{-20}$	$-9.4981e^{-4}$	$-7.0517e^{-8}$
14	$-6.7456e^{-4}$	$-6.7456e^{-4}$	$-6.7110e^{-4}$	$-6.7110e^{-4}$	$-6.7220e^{-4}$	$-6.7207e^{-4}$
15	$1.8712e^{-11}$	$-9.5396e^{-4}$	$-3.7673e^{-19}$	$-9.4878e^{-4}$	$-7.3930e^{-8}$	$-9.4962e^{-4}$
16	$6.7456e^{-4}$	$-6.7456e^{-4}$	$6.7110e^{-4}$	$-6.7110e^{-4}$	$6.7210e^{-4}$	$-6.7196e^{-4}$

Tableau 4.3 – Déplacements (u_x, u_y) aux 16 nœuds pour le cisaillement pur (mm).

Nœud	Référence (EF fins)		Super-élément à 8 nœuds		Super-élément à 16 nœuds	
	u_x	u_y	u_x	u_y	u_x	u_y
1	$-1.7731e^{-3}$	$-1.7731e^{-3}$	$-1.7879e^{-3}$	$-1.7879e^{-3}$	$-1.7852e^{-3}$	$-1.7852e^{-3}$
2	$-1.7455e^{-3}$	$1.7119e^{-15}$	$-1.7563e^{-3}$	$3.1577e^{-18}$	$-1.7590e^{-3}$	$1.3996e^{-7}$
3	$-1.7731e^{-3}$	$1.7731e^{-3}$	$-1.7879e^{-3}$	$1.7879e^{-3}$	$-1.7852e^{-3}$	$1.7853e^{-3}$
4	$1.7184e^{-15}$	$1.7455e^{-3}$	$2.4753e^{-18}$	$1.7563e^{-3}$	$9.4173e^{-8}$	$1.7590e^{-3}$
5	$1.7731e^{-3}$	$1.7731e^{-3}$	$1.7879e^{-3}$	$1.7879e^{-3}$	$1.7852e^{-3}$	$1.7852e^{-3}$
6	$1.7455e^{-3}$	$-2.1924e^{-15}$	$1.7563e^{-3}$	$3.6727e^{-18}$	$1.7590e^{-3}$	$-1.3735e^{-7}$
7	$1.7731e^{-3}$	$-1.7731e^{-3}$	$1.7879e^{-3}$	$-1.7879e^{-3}$	$1.7852e^{-3}$	$-1.7853e^{-3}$
8	$-1.1749e^{-15}$	$-1.7455e^{-3}$	$2.6427e^{-18}$	$-1.7563e^{-3}$	$-8.5038e^{-8}$	$-1.7590e^{-3}$
9	$-3.1587e^{-10}$	$1.0282e^{-3}$	$1.5830e^{-18}$	$1.0380e^{-3}$	$-5.0146e^{-8}$	$1.0005e^{-3}$
10	$7.2704e^{-4}$	$7.2704e^{-4}$	$7.3400e^{-4}$	$7.3400e^{-4}$	$7.0703e^{-4}$	$7.0712e^{-4}$
11	$1.0282e^{-3}$	$2.3320e^{-10}$	$1.0380e^{-3}$	$2.5721e^{-18}$	$1.0005e^{-3}$	$6.7767e^{-8}$
12	$7.2704e^{-4}$	$-7.2704e^{-4}$	$7.3400e^{-4}$	$-7.3400e^{-4}$	$7.0710e^{-4}$	$-7.0702e^{-4}$
13	$1.5792e^{-10}$	$-1.0282e^{-3}$	$1.6708e^{-18}$	$-1.0380e^{-3}$	$4.8521e^{-8}$	$-1.0005e^{-3}$
14	$-7.2704e^{-4}$	$-7.2704e^{-4}$	$-7.3400e^{-4}$	$-7.3400e^{-4}$	$-7.0703e^{-4}$	$-7.0711e^{-4}$
15	$-1.0282e^{-3}$	$2.0170e^{-11}$	$-1.0380e^{-3}$	$2.3183e^{-18}$	$-1.0005e^{-3}$	$-6.6169e^{-8}$
16	$-7.2704e^{-4}$	$7.2704e^{-4}$	$-7.3400e^{-4}$	$7.3400e^{-4}$	$-7.0710e^{-4}$	$7.0702e^{-4}$

Tableau 4.4 – Déplacements (u_x, u_y) aux 16 nœuds pour le cisaillement simple (mm).

Nœud	Référence (EF fins)		Super-élément à 8 nœuds		Super-élément à 16 nœuds	
	u_x	u_y	u_x	u_y	u_x	u_y
1	$-1.9840e^{-3}$	$2.8207e^{-4}$	$-1.9963e^{-3}$	$2.7161e^{-4}$	$-2.0108e^{-3}$	$2.8882e^{-4}$
2	$-1.9708e^{-3}$	$7.9318e^{-16}$	$-1.9797e^{-3}$	$-1.4548e^{-19}$	$-2.0132e^{-3}$	$6.1717e^{-8}$
3	$-1.9840e^{-3}$	$-2.8207e^{-4}$	$-1.9963e^{-3}$	$-2.7161e^{-4}$	$-2.0108e^{-3}$	$-2.8878e^{-4}$
4	$8.0277e^{-16}$	$-3.0472e^{-4}$	$1.2949e^{-18}$	$-2.9749e^{-4}$	$3.7900e^{-8}$	$-3.2775e^{-4}$
5	$1.9840e^{-3}$	$-2.8207e^{-4}$	$1.9963e^{-3}$	$-2.7161e^{-4}$	$2.0108e^{-3}$	$-2.8882e^{-4}$
6	$1.9708e^{-3}$	$-9.7139e^{-16}$	$1.9797e^{-3}$	$5.1881e^{-20}$	$2.0132e^{-3}$	$-6.0853e^{-8}$
7	$1.9840e^{-3}$	$2.8207e^{-4}$	$1.9963e^{-3}$	$2.7161e^{-4}$	$2.0108e^{-3}$	$2.8878e^{-4}$
8	$-5.1120e^{-16}$	$3.0472e^{-4}$	$1.7415e^{-18}$	$2.9749e^{-4}$	$-3.3150e^{-8}$	$3.2775e^{-4}$
9	$-2.2183e^{-10}$	$2.6757e^{-4}$	$9.5788e^{-19}$	$2.7502e^{-4}$	$-2.1935e^{-8}$	$4.8605e^{-4}$
10	$5.1060e^{-4}$	$1.8929e^{-4}$	$5.1616e^{-4}$	$1.9461e^{-4}$	$3.4353e^{-4}$	$3.3815e^{-4}$
11	$7.2212e^{-4}$	$6.0751e^{-11}$	$7.2992e^{-4}$	$1.1664e^{-19}$	$4.7839e^{-4}$	$3.2319e^{-8}$
12	$5.1060e^{-4}$	$-1.8929e^{-4}$	$5.1616e^{-4}$	$-1.9461e^{-4}$	$3.4357e^{-4}$	$-3.3810e^{-4}$
13	$1.1091e^{-10}$	$-2.6757e^{-4}$	$1.0324e^{-18}$	$-2.7502e^{-4}$	$2.1076e^{-8}$	$-4.8605e^{-4}$
14	$-5.1060e^{-4}$	$-1.8929e^{-4}$	$-5.1616e^{-4}$	$-1.9461e^{-4}$	$-3.4354e^{-4}$	$-3.3815e^{-4}$
15	$-7.2212e^{-4}$	$5.2547e^{-12}$	$-7.2992e^{-4}$	$-1.5619e^{-19}$	$-4.7839e^{-4}$	$-3.1406e^{-8}$
16	$-5.1060e^{-4}$	$1.8929e^{-4}$	$-5.1616e^{-4}$	$1.9461e^{-4}$	$-3.4356e^{-4}$	$3.3810e^{-4}$

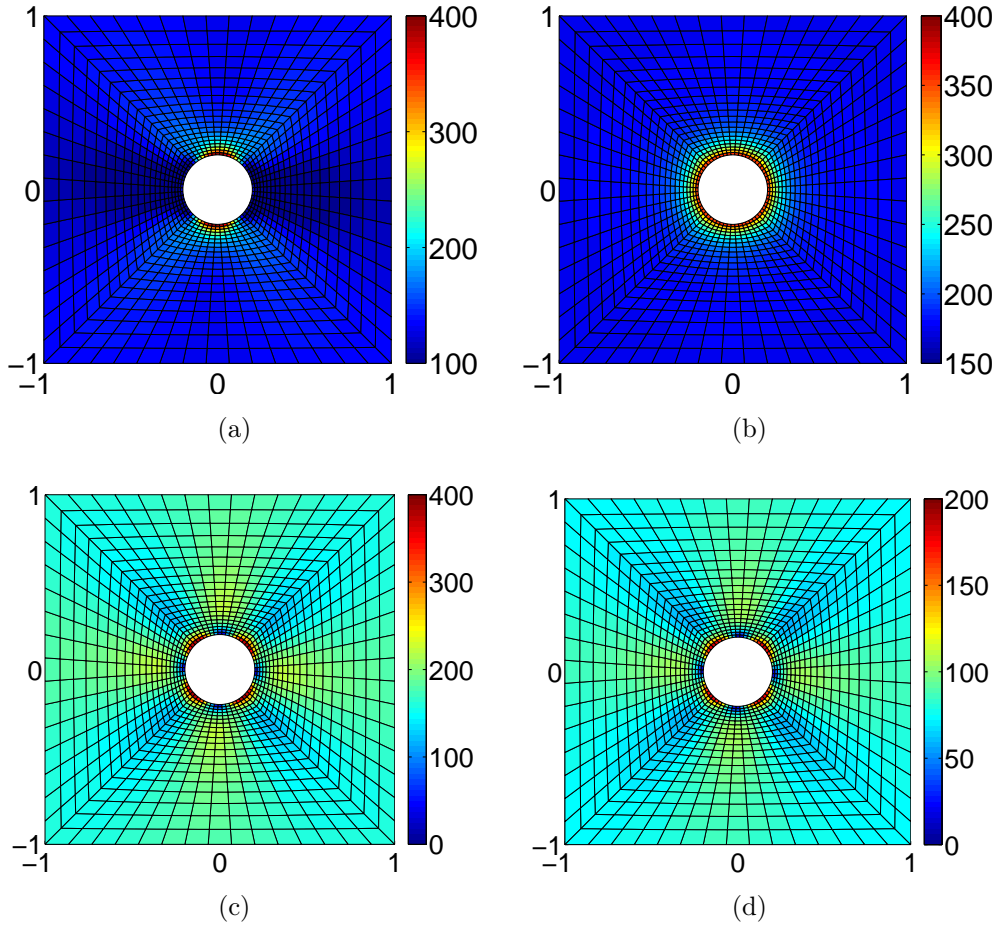


FIGURE 4.5 – Distribution de la contrainte équivalente de von Mises obtenue à partir du maillage fin standard. (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.

à $7.5431e^{-4}$ mm et vaut $-7.5438e^{-4}$ mm au nœud n° 12. Autre exemple, dans le cas de la traction biaxiale, les déplacements au nœud n° 12 doivent être tels que $-u_x = u_y$ mais valent $u_x = -6.7210e^{-4}$ mm et $u_y = 6.7196e^{-4}$ mm. De même, lorsqu'une composante du déplacement est théoriquement nulle, la valeur obtenue avec le super-élément à 16 nœuds est la moins précise, et ce quel que soit le cas de chargement considéré. Par exemple, pour un cas de traction uniaxiale, les déplacements u_x doivent être nuls le long de l'axe $\{x = 0\}$, mais la valeur calculée aux nœuds n° 2 et n° 6 (Figure 4.3) est de l'ordre de 10^{-8} mm pour le super-élément à 16 nœuds alors qu'elle est de l'ordre de 10^{-19} mm (précision machine) pour le super-élément à 8 nœuds, et 10^{-15} mm pour le maillage EF fin. Ces imprécisions pourraient s'expliquer par une sous-intégration numérique.

En ce qui concerne les 8 nœuds externes, l'analyse des déplacements montre que les résultats obtenus avec le super-élément à 16 nœuds sont plus proches de la référence (maillage EF fin) que ceux obtenus avec le super-élément à 8 nœuds pour les cas de traction uniaxiale, traction biaxiale et cisaillement pur. Cette remarque est valable pour

les deux composantes du déplacement, u_x et u_y . Par exemple, l'erreur est inférieure à 1% pour u_x et u_y pour un chargement en traction biaxiale ou en cisaillement pur. Pour un chargement en traction uniaxiale, l'erreur maximale pour les déplacements u_x et u_y est de l'ordre de 2% et 5.4%, respectivement. Un écart relatif plus important est observé sur la composante u_y du déplacement pour le cas de la traction uniaxiale. Ceci peut s'expliquer par le fait que la frontière de la plaque correspondante n'est pas contrainte, contrairement aux autres cas-tests. Les déplacements u_y sont dus aux seules contractions résultant de l'extension longitudinale de la plaque perforée. Ces contractions semblent être plus difficiles à simuler de façon précise avec peu de ddls. Par contre, pour le cas du cisaillement simple, les résultats obtenus avec le super-élément à 16 nœuds sont légèrement moins bons que ceux obtenus avec le super-élément à 8 nœuds. En effet, l'erreur maximale pour les déplacements u_x et u_y est de l'ordre de 2.2% et 7.6%, respectivement, alors qu'elle est de l'ordre de 0.6% et 3.7% pour le super-élément à 8 nœuds.

Enfin, les déplacements nodaux des 8 nœuds internes obtenus avec le super-élément à 16 nœuds sont analysés. Pour les cas de traction uniaxiale, traction biaxiale, et cisaillement pur, les résultats sont très précis. En effet, l'erreur maximale observée pour les déplacements u_x et u_y est de l'ordre de 0.5%, 2%, et 2.8%, respectivement. Par contre, les écarts sont plus importants entre les déplacements des nœuds du nouveau super-élément et ceux pris en référence (EF fins) pour le cas du cisaillement simple. L'erreur maximale est de l'ordre 33% pour u_x au nœud n° 11 (Tableau 4.4). Pour u_y , des écarts de l'ordre de 80% sont observés. Par exemple, la valeur u_y calculée au nœud n° 9 est $4.8605e^{-4}$ mm alors que la valeur de référence est $2.6757e^{-4}$ mm (Tableau 4.4). Cependant, le signe et l'ordre de grandeur des valeurs calculées sont respectés. Notons que les déplacements des nœuds internes font l'objet d'une erreur systématique en cisaillement simple. Par exemple, il suffit de multiplier les valeurs de u_x et u_y par un coefficient de 1.49 et 0.56, respectivement, pour que l'erreur soit inférieure à 2%.

En résumé, les déplacements nodaux obtenus avec le super-élément à 16 nœuds sont cohérents avec la référence et sont calculés avec précision, pour la plupart des cas de chargement analysés. Néanmoins, le cas du cisaillement simple, qui est le seul cas parmi les 4 étudiés à faire intervenir un mode de corps rigide (rotation pure), semble plus difficile à modéliser avec le super-élément perforé à 16 nœuds⁷.

Les déplacements nodaux du super-élément sont maintenant utilisés pour calculer les champs de contraintes et de déplacements à l'intérieur de l'élément en suivant la méthodologie de reconstruction de champs introduite dans la Section 1.5.5.

La distribution de la contrainte équivalente de von Mises obtenue avec le super-élément à

7. Pourtant, les modes de corps rigides ont tous été retirés dans le calcul de la matrice de rigidité comme préconisé dans la littérature (Section 1.5.2).

16 nœuds est, par exemple, montrée dans la Figure 4.6. Les résultats obtenus sont com-

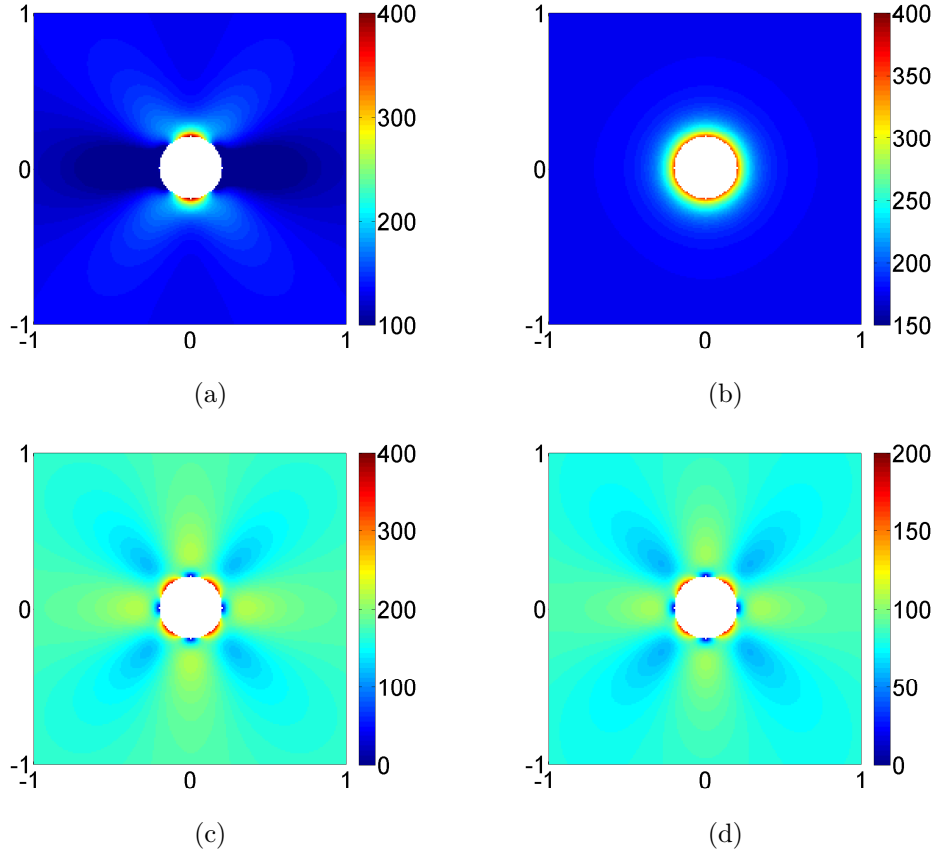


FIGURE 4.6 – Distribution de la contrainte équivalente de von Mises obtenue avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation. (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.

parés aux résultats de référence (maillage EF fin) et aux résultats obtenus avec le super-élément à 8 nœuds le long de lignes particulières dans la Figure 4.7. L'erreur maximale en pourcentage calculée à l'intérieur du domaine perforé $\{(x, y) \in [-1, 1]^2\}$ pour σ_{VM} , par rapport aux résultats de référence, est de l'ordre de 1.7% pour la traction uniaxiale, 1% pour la traction biaxiale, 5.4% pour le cisaillement pur, et 5.8% pour le cisaillement simple. Ces écarts sont du même ordre de grandeur que ceux observés précédemment sur les déplacements nodaux pour tous les cas de chargement sauf le cisaillement simple. Pour ce dernier cas, l'écart est faible comparé à ce qui a été observé pour les déplacements nodaux. Ceci peut s'expliquer par le fait que le système linéaire est surdéterminé (i.e., le second membre est composé de 32 valeurs de déplacements nodaux et seulement 16 paramètres inconnus sont à identifier) et que les perturbations sont écartées lors de la résolution du système, au même titre qu'une donnée éloignée de la solution est écartée lors d'une régression linéaire. Les écarts les plus importants sont principalement localisés autour de la perforation pour les cas de chargement en traction, et à proximité du bord du domaine $\{(x, y) \in [-1, 1]^2\}$ pour les cas de chargement en cisaillement. D'ailleurs, les Figures 4.7(c), 4.7(d), 4.8(c) et 4.8(d) mettent en évidence que le super-élément perforé

à 16 nœuds a tendance à surestimer les contraintes lorsqu'on s'approche du bord⁸. Avec le super-élément à 8 nœuds, l'erreur maximale en pourcentage dans le domaine perforé $\{(x, y) \in [-1, 1]^2\}$ est principalement observée le long de la perforation, et est de l'ordre de 2.7% pour le cas de traction uniaxiale, 1% pour le cas de la traction biaxiale, 2.5% pour le cas du cisaillement pur, et 3.1% pour le cas du cisaillement simple.

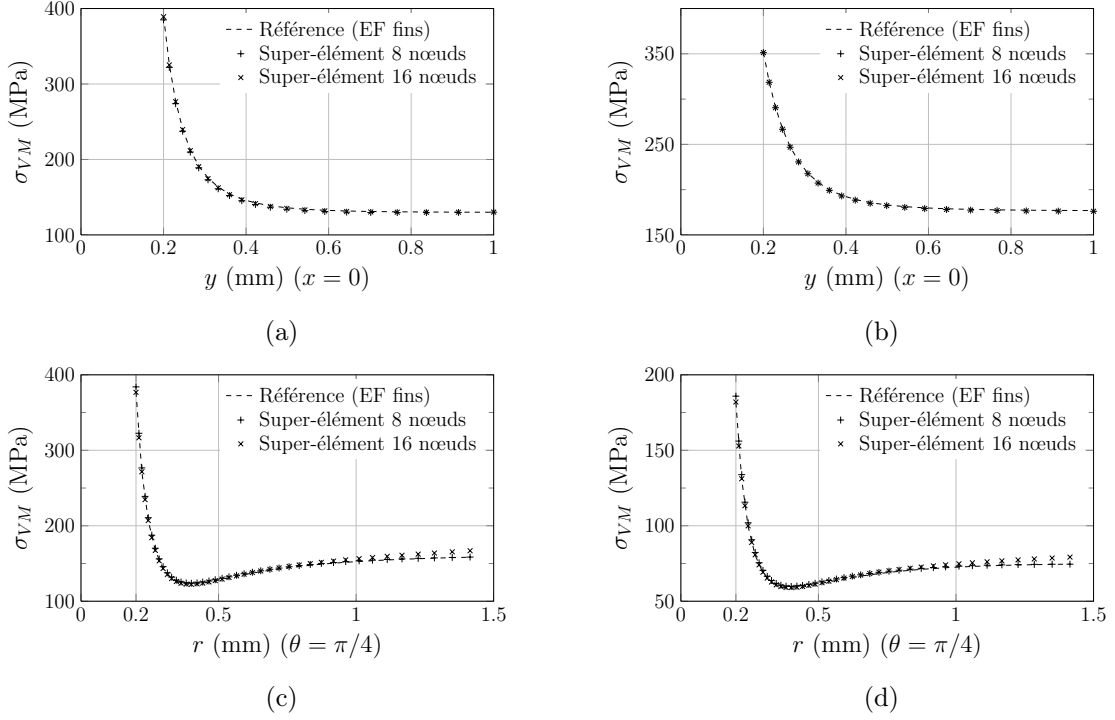


FIGURE 4.7 – Distribution de la contrainte équivalente de von Mises obtenue avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation. Comparaison avec le super-élément à 8 nœuds et la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{x = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{x = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = y\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = y\}$.

La valeur maximale de la contrainte de von Mises dans le domaine perforé $\{(x, y) \in [-1, 1]^2\}$ est également comparée dans le Tableau 4.5. Dans tous les cas, le super-élément à 16 nœuds est plus proche de la référence que le super-élément à 8 nœuds, en particulier pour les cas de cisaillement. Les modèles sont aussi comparés sur le contour de la perforation dans la Figure 4.9. Cette zone est prédominante pour l'évaluation de critères de rupture et les résultats doivent, par conséquent, y être précis. L'hétérogénéité des champs sur le contour du trou est aussi bien prédite avec le nouveau super-élément qu'avec le super-élément sans nœuds internes. Notons que le cas de la traction biaxiale n'est pas

8. Notons que l'axe $\{x = y\}$ a été choisi pour comparer les résultats obtenus avec le super-élément à 16 nœuds aux résultats de référence, dans le cas d'un cisaillement, car l'étude des fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8 a montré que des écarts pouvaient apparaître spécifiquement aux 4 coins du domaine $\{(x, y) \in [-1, 1]^2\}$ (Section 3.4.1).

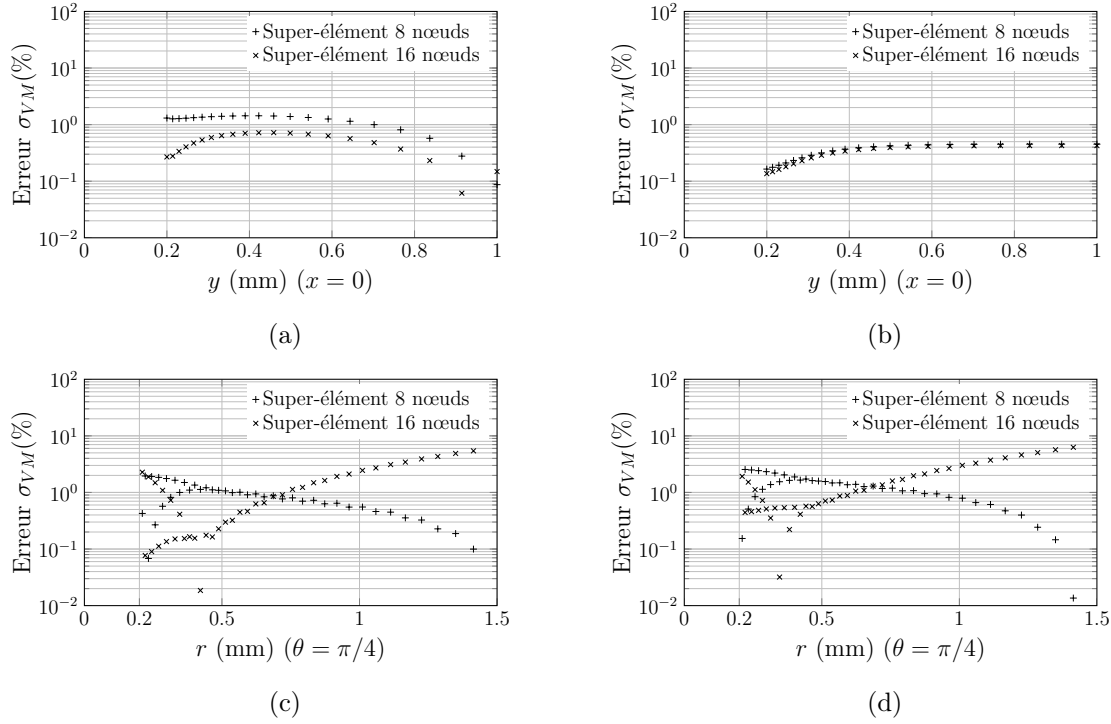


FIGURE 4.8 – Erreur relative (%) sur la contrainte équivalente de von Mises obtenue avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation, et avec le super-élément à 8 nœuds, par rapport à la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale le long de l’axe $\{x = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l’axe $\{x = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l’axe $\{x = y\}$, (d) Cisaillement simple le long de l’axe $\{x = y\}$.

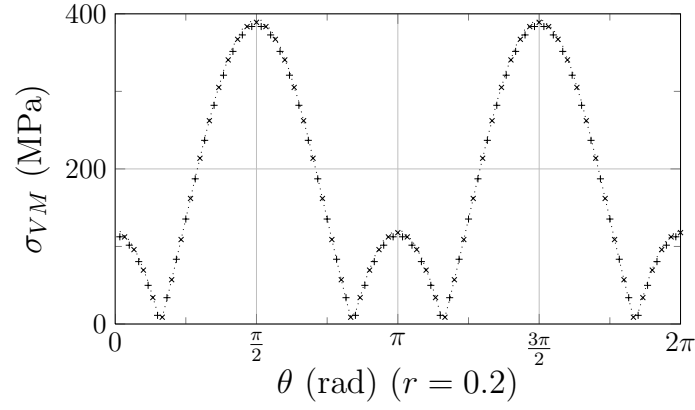
Tableau 4.5 – Valeur maximale de σ_{VM} dans le domaine perforé (MPa).

	Référence (EF fins)	Super-élément à 8 nœuds	Super-élément à 16 nœuds
Traction uniaxiale	391.66	385.01	389.06
Traction biaxiale	353.30	351.28	351.39
Cisaillement pur	377.71	384.03	376.82
Cisaillement simple	181.75	185.87	181.98

représenté dans la Figure 4.9 car la contrainte équivalente de von Mises est quasiment constante le long de la frontière du trou dans ce cas.

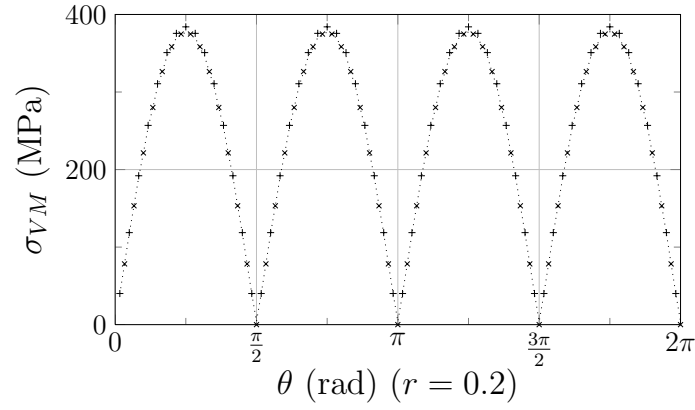
En résumé, en ce qui concerne la contrainte de von Mises, la précision du super-élément perforé à 16 nœuds est similaire, voire légèrement meilleure, à celle du super-élément à 8 nœuds pour des cas de chargement en traction. Par contre, l’ajout de nœuds sur la perforation diminue la précision pour des cas de chargement en cisaillement, mais elle reste satisfaisante (5.8% d’erreur dans le domaine perforé pour le super-élément à 16 nœuds, contre 3.1% pour le super-élément à 8 nœuds). De plus, il a été montré que le super-élément à 16 nœuds était globalement plus précis que le super-élément à 8 nœuds au voisinage de la perforation (ce dernier étant plus précis au voisinage de la frontière externe

..... Référence (EF fins) + Super-élément 8 nœuds × Super-élément 16 nœuds



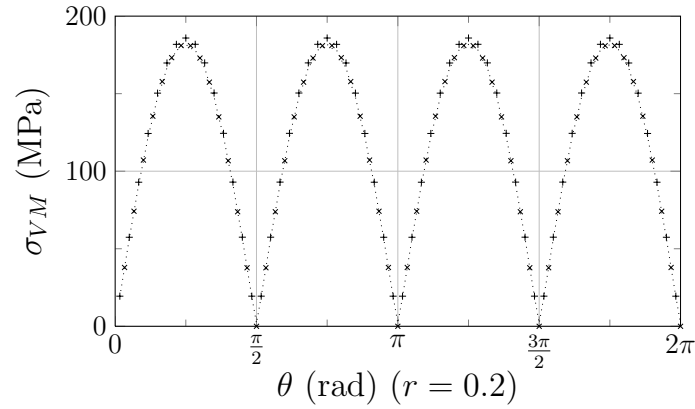
(a)

..... Référence (EF fins) + Super-élément 8 nœuds × Super-élément 16 nœuds



(b)

..... Référence (EF fins) + Super-élément 8 nœuds × Super-élément 16 nœuds



(c)

FIGURE 4.9 – Distribution de la contrainte équivalente de von Mises le long de la perforation obtenue avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation. Comparaison avec le super-élément à 8 nœuds et la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale, (b) Cisaillement pur, (c) Cisaillement simple.

que le premier), ce qui est particulièrement intéressant. Cette conclusion est également valable pour chacune des composantes du tenseur des contraintes, i.e. σ_{xx} , σ_{yy} , et σ_{xy} .

Concernant le champ de déplacements calculé à l'intérieur du domaine perforé (cf. Figures H.2, H.3, et H.4 dans l'Annexe H), la conclusion est la même que pour les contraintes. En effet, les résultats obtenus pour le champ des déplacements par le super-élément à 16 nœuds sont soit similaires, soit plus proches de la référence, que le super-élément à 8 nœuds dans le cas d'une traction, mais sont en revanche un peu moins précis dans le cas d'un cisaillement. Par exemple, l'erreur calculée pour le déplacement u_x est au plus égale à 1.1% pour la traction uniaxiale, 0.8% pour la traction biaxiale, 1.4% pour le cisaillement pur, et 0.9% pour le cisaillement simple. Avec le super-élément à 8 nœuds, l'erreur calculée est de l'ordre de 2.1% pour la traction uniaxiale, 0.9% pour la traction biaxiale, 0.9% pour le cisaillement pur, et 0.7% pour le cisaillement simple au plus.

La valeur du coefficient de concentration de contraintes, K_t , obtenue avec le super-élément à 16 nœuds, pour un cas de chargement en traction uniaxiale, est comparée à celle obtenue avec le super-élément à 8 nœuds et d'autres super-éléments perforés de la littérature (Tableau 4.6). Comme attendu, le super-élément à 16 nœuds donne de meilleurs résultats que le super-élément à 8 nœuds [10]. En effet, il a été précédemment montré que le super-élément à 16 nœuds est plus précis que le super-élément à 8 nœuds en termes de valeur maximale des contraintes (Tableau 4.5).

Tableau 4.6 – Comparaison du coefficient de concentration de contraintes (K_t).

	K_t	Erreur (%)
Analytique [103, 113]	3	
Piltner, élément perforé à 8 nœuds [93]	2.993	0.2
Super-élément perforé à 16 nœuds (4 pts de Gauss par côté) [114]	2.987	0.45
Super-élément perforé à 8 nœuds (4 pts de Gauss par côté) [10]	2.96	1.3
Dhanasekar <i>et al.</i> [55]	2.87	4

Concernant les coûts de calcul, le nouveau super-élément reste très efficace. Environ 0.3 s (CPU) seulement sont nécessaires pour calculer un cas-test en utilisant le super-élément à 16 nœuds, alors que 50 s sont nécessaires pour simuler le même cas-test (avec la même précision) avec le maillage raffiné. Les coûts de calcul augmentent légèrement avec le super-élément à 16 nœuds lorsque l'on compare avec le super-élément à 8 nœuds (0.24 s). Ce n'est pas surprenant puisque le système linéaire à résoudre $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$ est maintenant de plus grande dimension, puisque des ddls supplémentaires ont été introduits au système. Cela reste cependant efficace d'un point de vue temps de calcul pour un calcul de structures.

4.3.1.2 Étude de l'influence de la règle d'intégration sur la précision du super-élément

Une règle d'intégration 1D à 4 points de Gauss a été appliquée pour le calcul de la matrice de rigidité dans la Section 4.3.1.1. Une étude complémentaire est ici proposée afin d'évaluer l'influence du nombre de points de Gauss sur la précision des résultats.

Les calculs réalisés avec une règle d'intégration à 2 points de Gauss donnent des résultats incorrects pour le calcul des déplacements nodaux, quel que soit le cas de chargement étudié. Les résultats obtenus dans le domaine perforé ne sont donc pas cohérents, comme le montre la Figure 4.10 pour le cas d'une traction biaxiale par exemple, où les contraintes sont maximales aux 4 coins du domaine. Ceci s'explique par le fait qu'il existe une dépendance entre le nombre de nœuds et le nombre de points d'intégration utilisé. Si le nombre de points d'intégration est insuffisant, alors la matrice de rigidité évaluée numériquement peut être singulière [11].

Par contre, les déplacements nodaux calculés pour une règle d'intégration à 4, 16, ou 32 points de Gauss sont similaires pour tous les cas de chargement. D'ailleurs, dans le cas du cisaillement simple, l'augmentation du nombre de points de Gauss n'a quasiment pas d'influence sur les valeurs numériques des déplacements nodaux, et en particulier sur le calcul des déplacements des nœuds de la perforation. L'augmentation du nombre de points de Gauss améliore la précision des déplacements des nœuds de la frontière externe (e.g., dans le cas du cisaillement simple, l'erreur pour le déplacement u_x du nœud n° 12 est de 2.15% avec 4 points de Gauss par côté, et 0.38% avec 16 points de Gauss par côté). Par contre, la précision des déplacements des nœuds de la perforation diminue légèrement avec l'augmentation du nombre de points de Gauss (e.g., dans le cas de la traction uniaxiale, l'erreur pour le déplacement u_y du nœud n° 10 est de 1.73% avec 4 points de Gauss par côté, et 3.59% avec 16 points de Gauss par côté). De plus, l'augmentation du nombre de points de Gauss ne permet pas d'améliorer la précision sur les symétries caractéristiques des différents cas de chargement comme cela a déjà été évoqué dans la Section 4.3.1.1.

Les champs de contraintes et de déplacements sont réinterpolés à l'intérieur du super-élément à partir de ces valeurs nodales. Les résultats obtenus avec une règle d'intégration à 4, 16, ou 32 points de Gauss sont comparés en termes de contrainte de von Mises dans les Figures 4.11 et 4.12, et en termes de déplacement u_x dans l'Annexe H (Figures H.5 et H.6). Les résultats obtenus sont similaires quel que soit le cas de chargement analysé ou le nombre de points de Gauss, parmi ceux étudiés. Les Figures 4.12 et H.6, qui illustrent l'erreur en pourcentage entre les résultats de référence (EF fins) et ceux obtenus avec le super-élément à 16 nœuds en fonction du nombre de points de Gauss utilisé, mettent en évidence que l'utilisation d'une règle d'intégration à 4 points de Gauss donne des résultats identiques voire meilleurs que les règles d'intégration à 16 ou 32 points de Gauss. Pour ces

deux derniers, les résultats numériques sont vraiment similaires. Le calcul du coefficient K_t pour le cas de la traction uniaxiale confirme cette tendance, puisque $K_t = 2.987$ pour 4 points de Gauss par côté, et $K_t = 2.972$ pour 16 ou 32 points de Gauss par côté.

L'augmentation du nombre de points de Gauss ne permet pas d'améliorer la précision des résultats, ce qui est contre-intuitif. Les résultats sont toutefois satisfaisants pour 4, 16 ou 32 points de Gauss par côté. Par conséquent, le choix d'une règle d'intégration à 4 points de Gauss est conservé pour le calcul de la matrice de rigidité et le vecteur chargement associés au super-élément avec nœuds sur la perforation.

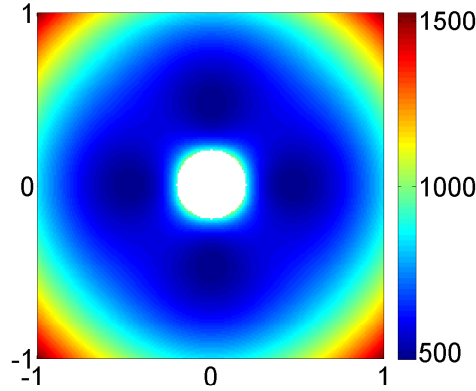


FIGURE 4.10 – Distribution de la contrainte équivalente de von Mises obtenue avec le super-élément perforé avec nœuds internes évalué avec une règle d'intégration à 2 points de Gauss par côté (traction biaxiale).

4.3.1.3 Réinterpolation des champs mécaniques à partir de 32 paramètres

L'étude réalisée dans le Chapitre 3 sur les fonctions d'interpolation du super-élément perforé a montré qu'une reconstruction des champs dans le domaine perforé était moins précise lorsque celles-ci sont tronquées à l'ordre 8 et que 32 paramètres doivent être identifiés. Rappelons que lorsque l'ordre 4 est fixé, 16 paramètres doivent être identifiés. Il a, notamment, été montré que certains paramètres, dits parasites, présents à l'ordre 8 et absents à l'ordre 4, pouvaient introduire un biais dans la reconstruction des champs. La question est donc ici de savoir quelle influence une réinterpolation à l'ordre 8 peut-elle avoir sur la précision des champs mécaniques reconstruits à l'intérieur du super-élément.

La réinterpolation des champs à l'intérieur de l'élément avec tous les paramètres (32 paramètres) est effectuée à partir des valeurs (u_x, u_y) prélevées aux 16 nœuds qui sont données dans les Tableaux 4.1, 4.2, 4.3, et 4.4 (mêmes valeurs que celles utilisées pour la réinterpolation avec 16 paramètres présentée dans la Section 4.3.1.1). Les 32 paramètres

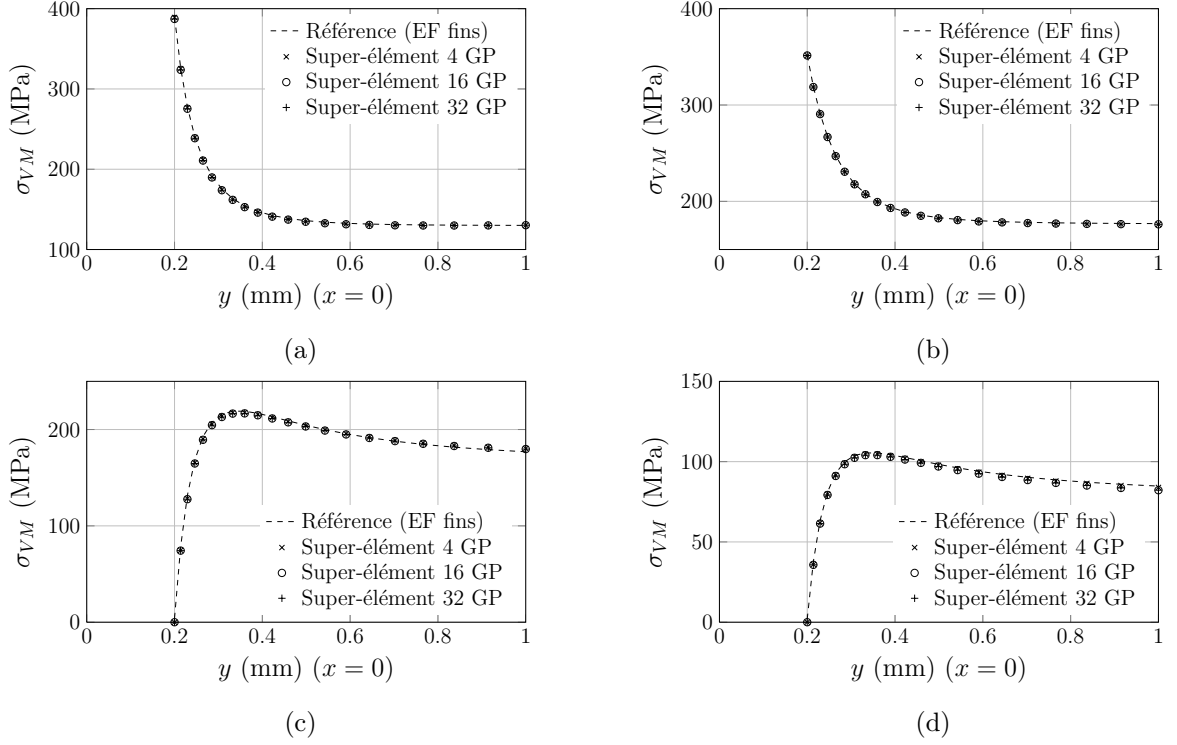


FIGURE 4.11 – Distribution de la contrainte équivalente de von Mises le long de l'axe $\{x = 0\}$ obtenue avec le super-élément perforé à 16 nœuds internes pour 4, 16, et 32 points de Gauss par côté, et comparaison avec la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.

(α_j, β_j) sont, alors, identifiés *via* la résolution d'un système linéaire carré et non plus sur-déterminé, comme c'était le cas pour une réinterpolation à l'ordre 4. Les résultats obtenus à partir des 32 paramètres identifiés sont détaillés ci-après.

La distribution de la contrainte équivalente de von Mises est, par exemple, illustrée dans les Figures 4.13 et 4.14. Les résultats obtenus pour le déplacement u_x sont montrés en Annexe H, dans les Figures H.7 et H.8. Une comparaison des résultats obtenus le long de lignes particulières avec 16 et 32 paramètres est d'ailleurs proposée dans les Figures 4.14 et H.8. Comme cela était prévisible, les résultats de cette analyse sont semblables à ceux obtenus par l'analyse des fonctions d'interpolation effectuée dans la Section 3.4.1 pour la configuration $\{8/8/8\}$. En effet, si les champs sont correctement reconstruits dans le cas d'un chargement de traction uniaxiale ou biaxiale dans tout le domaine perforé, des écarts sont cependant observés dans le cas d'un cisaillement pur ou simple au voisinage de la frontière externe du super-élément (en bord de perforation, les champs de contraintes sont correctement et précisément reconstruits). Les écarts observés dans le cas d'un cisaillement pur (Figures 4.13(c) et 4.14(c)) sont du même ordre de grandeur que ceux observés dans l'étude des fonctions d'interpolation à l'ordre 8 (Section 3.4.1) et sont localisés dans les mêmes zones (i.e., dans les 4 coins du super-élément) (Figures 3.9(a) et 3.9(b)). La solution est reconstruite avec précision si les paramètres β_{-5} et β_7 sont manuellement fixés à zéro,

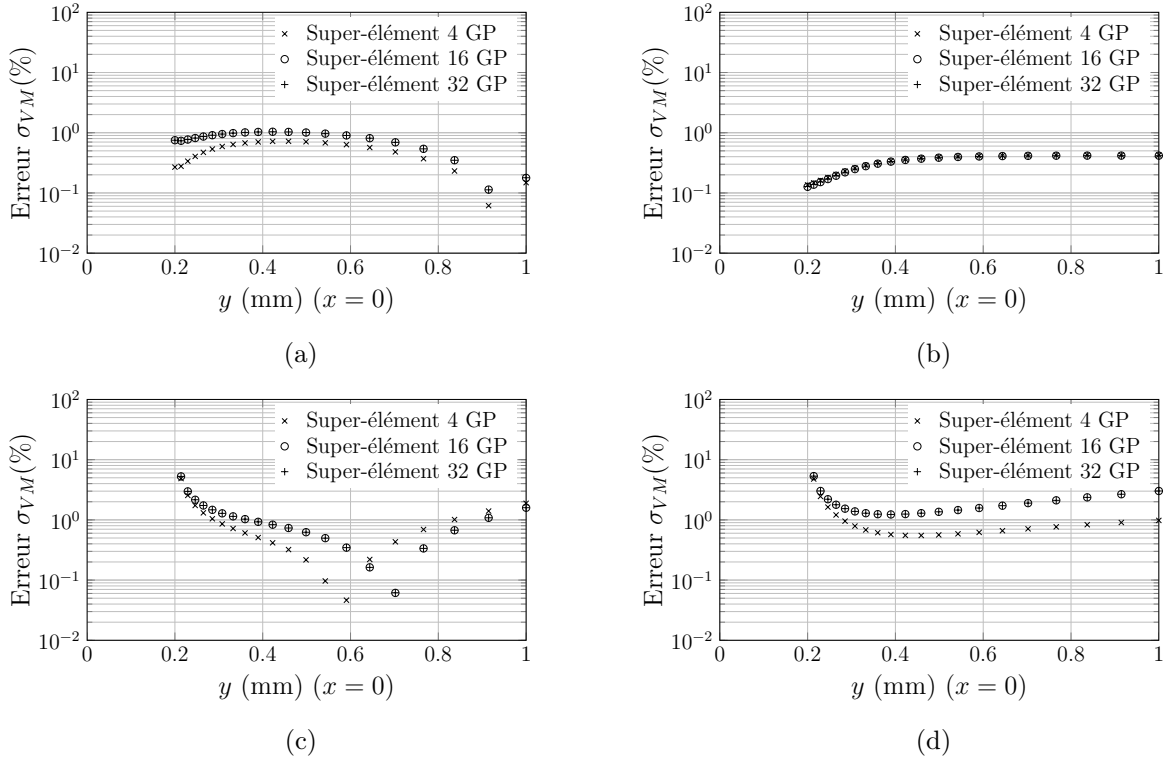


FIGURE 4.12 – Erreur relative (%) sur la contrainte équivalente de von Mises calculée en fonction du nombre de points de Gauss par rapport à la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.

comme le montre la Figure 4.14(c). Ces deux paramètres, dont les valeurs sont initialement de l'ordre de 10^{-3} et 10^{-6} , introduisent un biais dans la solution⁹ bien qu'ils apparaissent insignifiants en comparaison des paramètres significatifs qui sont de l'ordre de l'unité. Par contre, le cas du cisaillement simple est plus critique par rapport aux autres cas de chargement analysés. En effet, des écarts importants, principalement localisés sur le bord du super-élément, sont observés sur les champs de contraintes (Figures 4.13(d) et 4.14(d)) et de déplacements (Figures H.7(d) et H.8(d)). Contrairement aux contraintes qui sont correctement reconstruites au voisinage de la perforation, les déplacements sont quant à eux sous-estimés dans cette zone. Ces écarts ne sont, malgré tout, pas surprenants puisque des imprécisions numériques importantes ont été observées sur les déplacements calculés aux 8 nœuds de la perforation du super-élément (cf. analyse de la Section 4.3.1.1 et Tableau 4.4). Par conséquent, étant donné que le système linéaire à résoudre est moins bien conditionné à l'ordre 8 qu'à l'ordre 4, il était prévisible que des biais soient introduits dans le calcul des 32 paramètres (α_j, β_j) entraînant ainsi des écarts sur les champs mécaniques. Le paramètre β_1 , correspondant au mode de rotation rigide, est un des deux paramètres qui pilotent la solution en cisaillement simple. Sa valeur de référence est $\beta_1 = -4.20$ alors

9. Les mêmes termes, β_{-5} et β_7 , avaient été identifiés comme étant « parasites » dans l'étude des fonctions d'interpolation de la Section 3.4.1.

qu'il est identifié à une valeur de l'ordre de 10^{-4} lorsque la solution est réinterpolée à l'ordre 8, et à -4.05 à l'ordre 4. L'identification du mode de rotation rigide apparaît alors plus difficile avec les fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8 plutôt qu'à l'ordre 4. De la même façon que pour le cisaillement simple, une correction peut être apportée en fixant certains paramètres à zéro. Ici, en fixant β_{-7} et β_5 , dont la valeur est initialement de l'ordre de 10^{-4} et 10^{-3} , la précision des champs reconstruits est améliorée (Figure 4.14(d)).

En résumé, les conclusions de l'étude des fonctions d'interpolation du Chapitre 3 sont confirmées avec le super-élément. En attendant de mettre en place une méthode systématique qui consisterait à écarter les paramètres parasites qui perturbent la solution (Section 3.4.2), une réinterpolation à 16 paramètres (i.e., à l'ordre 4) doit donc être conservée pour éviter l'apparition de ces paramètres. Finalement, les paramètres parasites sont très influents lors de la réinterpolation des champs, mais le sont beaucoup moins dans la constitution de la matrice de rigidité.

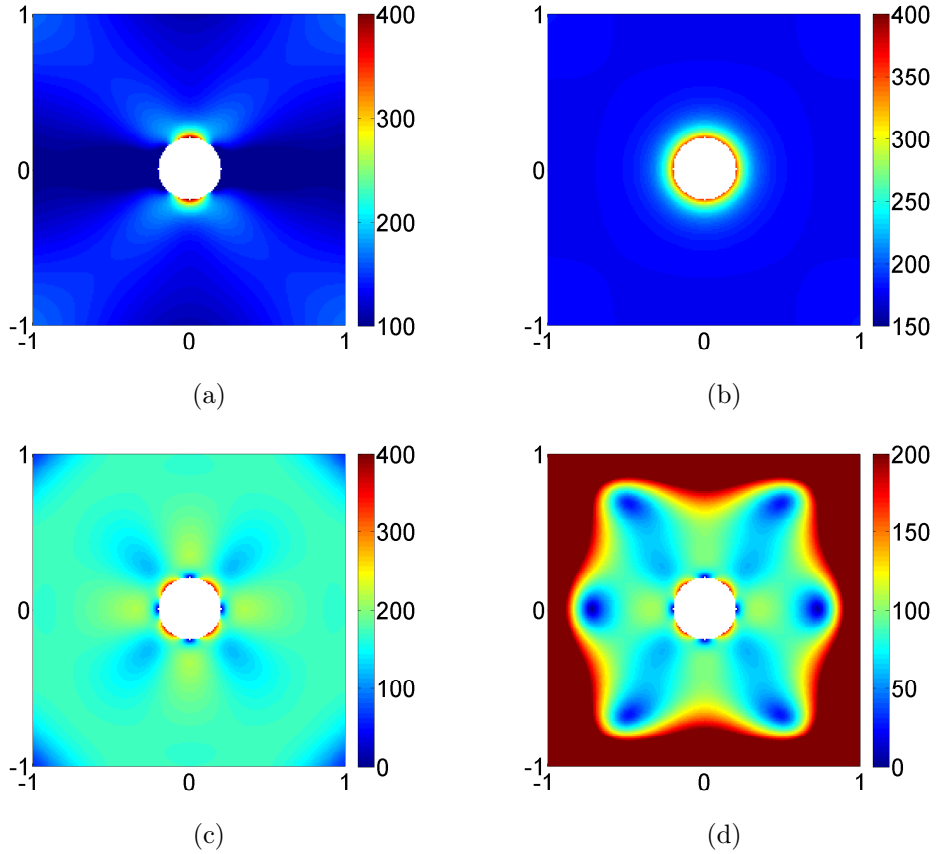


FIGURE 4.13 – Distribution de la contrainte équivalente de von Mises obtenue avec le super-élément à 16 nœuds et une réinterpolation à 32 paramètres. (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.

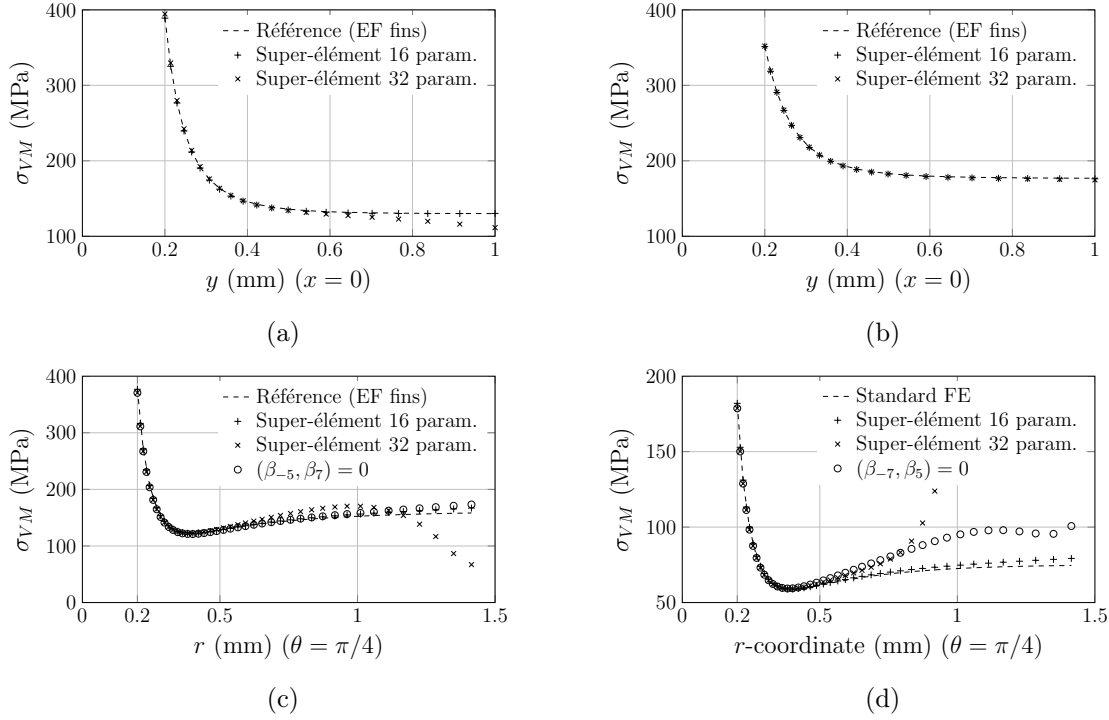


FIGURE 4.14 – Comparaison entre une réinterpolation à 16 ou 32 paramètres sur la distribution de la contrainte équivalente de von Mises obtenue avec le super-élément à 16 nœuds. (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{x = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{x = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = y\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = y\}$.

4.3.2 Chargement interne sur le trou

Le super-élément perforé à 16 nœuds étant validé pour des chargements externes, il s'agit maintenant de vérifier que l'application d'un chargement sur la frontière interne de l'élément est possible dans la pratique. Un intérêt particulier est porté sur la cohérence et la précision des champs mécaniques obtenus dans l'élément au voisinage de la perforation sous l'action d'un chargement interne.

Comme il est proposé dans la Section 2.3.3, une solution particulière simple est, dans un premier temps, mise en œuvre pour valider la formulation de notre élément lorsqu'un chargement est appliqué sur le contour de la perforation (et donc aux nouveaux nœuds de la perforation). Il s'agit de la solution analytique d'une plaque perforée soumise à une pression constante et uniforme (Équation (2.3.4)). Son expression est simple, la seule connaissance du rayon de la perforation, du module de cisaillement du matériau, et de la pression appliquée sur le contour de la perforation permet en effet de calculer les champs de contraintes et de déplacements dans la plaque sous l'action de ce chargement. Les distributions de la contrainte équivalente σ_{VM} et du déplacement u_x obtenues avec la

solution analytique d'une plaque perforée de rayon $r_0 = 0.2$, dont le module de cisaillement est $\mu = 28\,462$ MPa, et dont la perforation est soumise à une pression constante et uniforme de valeur $P = 100$ MPa sont illustrées, à titre d'exemple, dans la Figure 4.15.

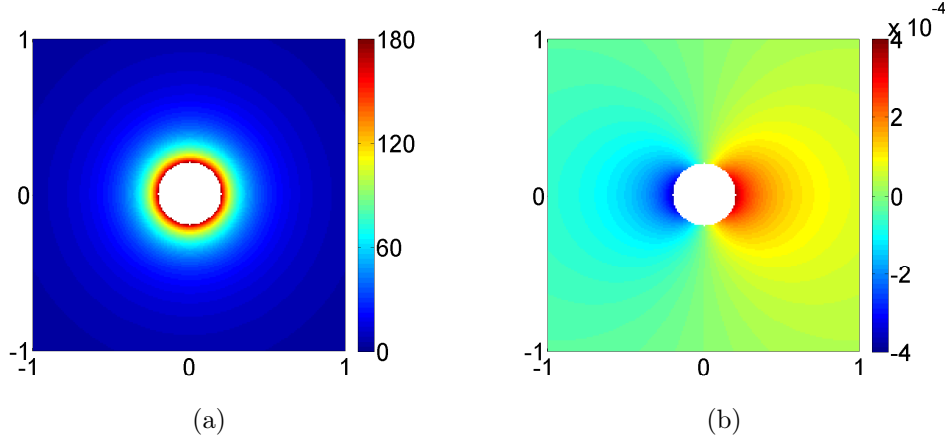


FIGURE 4.15 – Solution particulière analytique d'une plaque perforée soumise à une pression constante uniformément répartie sur le contour du trou de valeur $P = 100$ MPa. (a) Contrainte équivalente de von Mises σ_{VM}^p , (b) Déplacement u_x^p .

Dans un premier temps, on s'est assuré que la solution analytique est correcte. Pour cela, il a tout d'abord été vérifié que le vecteur contrainte sur le contour de la perforation $\{(r, \theta) ; r = r_0 \text{ et } \theta \in [0; 2\pi[\}$ calculé avec la solution particulière s'exprime bien sous la forme $\mathbf{T}^p = -P\mathbf{n}$, avec $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$. Ensuite, le maillage fin qui a été utilisé pour les analyses précédentes (Figure 3.7) a été repris ici pour réaliser le calcul EF suivant. Les conditions aux limites appliquées à la plaque perforée sont (i) une pression constante de 100 MPa uniformément répartie sur le contour de la perforation, (ii) une symétrie imposée sur l'axe des ordonnées ($u_x = 0$) et sur l'axe des abscisses ($u_y = 0$), et (iii) une condition aux limites en déplacement est imposée sur le bord extérieur de la plaque, i.e. les valeurs de u_x et u_y sont imposées en accord avec les déplacements calculés avec la solution analytique particulière aux mêmes positions¹⁰. Les résultats obtenus avec le maillage fin sont présentés dans la Figure 4.16, et sont superposés aux résultats obtenus avec la solution analytique.

Dans un second temps, un calcul avec les mêmes conditions aux limites que celles présentées précédemment, est réalisé avec un maillage qui comporte le super-élément à

10. Les déplacements u_x et u_y calculés à partir de la solution analytique particulière aux coordonnées des points qui se situent sur le bord de la plaque perforée ne sont pas nuls. Il a donc été jugé convenable qu'une condition aux limites en déplacement conforme à la solution particulière soit appliquée sur le maillage EF fin.

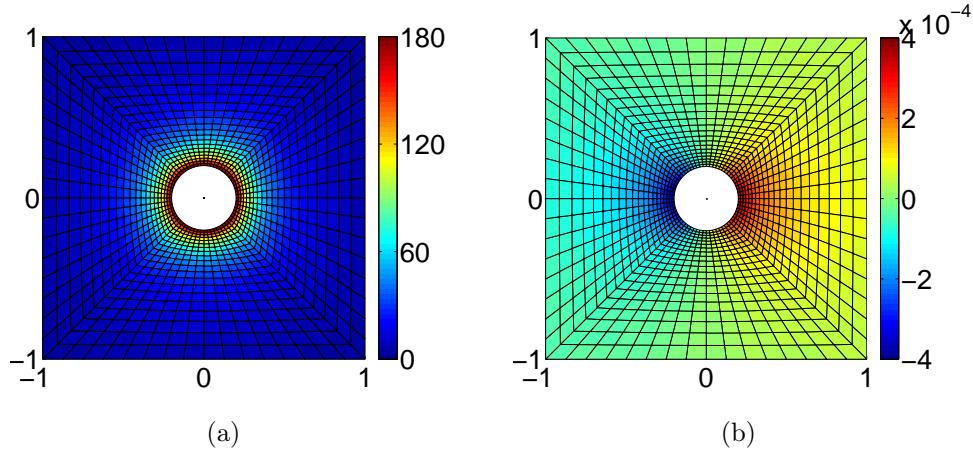


FIGURE 4.16 – Résultats obtenus avec le calcul EF fin pour le cas de la pression constante uniformément répartie de valeur $P = 100$ MPa appliquée sur le contour du trou. (a) Contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) Déplacement u_x .

16 nœuds en son centre, comme sur la Figure 4.4. Rappelons que la pression, dans le super-élément, est appliquée comme une donnée d'entrée (Section 4.2).

D'après l'Équation (2.2.4), la solution complète (\mathbf{u}, \mathbf{T}) est décomposée en la somme d'une solution homogène $(\mathbf{u}^h, \mathbf{T}^h)$ et d'une solution particulière $(\mathbf{u}^p, \mathbf{T}^p)$. Étant donné que le cas-test considéré consiste en l'application d'un chargement sur la frontière de la perforation et que des conditions en déplacement spécifiques sont imposées sur le bord de la plaque, la solution homogène doit alors être nulle.

Les valeurs des déplacements (u_x, u_y) obtenues avec le nouveau super-élément aux 16 nœuds (i.e. données de sortie du calcul ZéBuLoN) sont synthétisées dans le Tableau 4.7. Elles sont comparées aux valeurs de référence qui proviennent de la solution analytique et aux valeurs obtenues avec le maillage fin. Notons, dès à présent, que les déplacements obtenus avec le maillage fin sont effectivement proches de la solution analytique. En complément du tableau de résultats (Tableau 4.7), une visualisation graphique, sous la forme d'histogrammes, du déplacement u_x des nœuds externes et internes est proposée dans les Figures (4.17)-(4.18). Les résultats obtenus pour le déplacement u_y des nœuds externes et internes sont, de façon similaire, proposés dans l'Annexe I sous la forme d'histogrammes.

L'analyse de ces résultats met en évidence un problème évident de signe sur la valeur des déplacements calculés aux nœuds externes. La direction du déplacement des nœuds externes est opposée à celle donnée par la solution analytique (Figures 4.17 et I.1). De plus, les ordres de grandeur ne sont pas bien respectés. Par exemple, les déplacements u_x et u_y des nœuds externes calculés sont de l'ordre de 10^{-5} mm alors que les déplacements de référence sont de l'ordre de 10^{-4} mm. L'analyse des déplacements calculés avec la

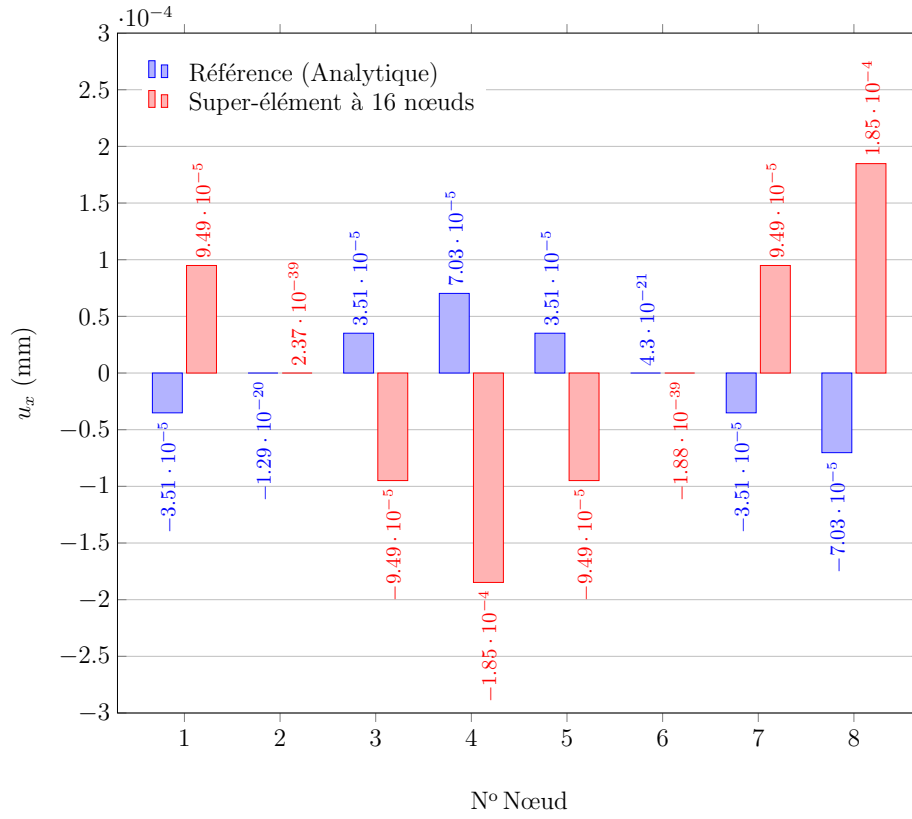


FIGURE 4.17 – Déplacement u_x des nœuds externes.

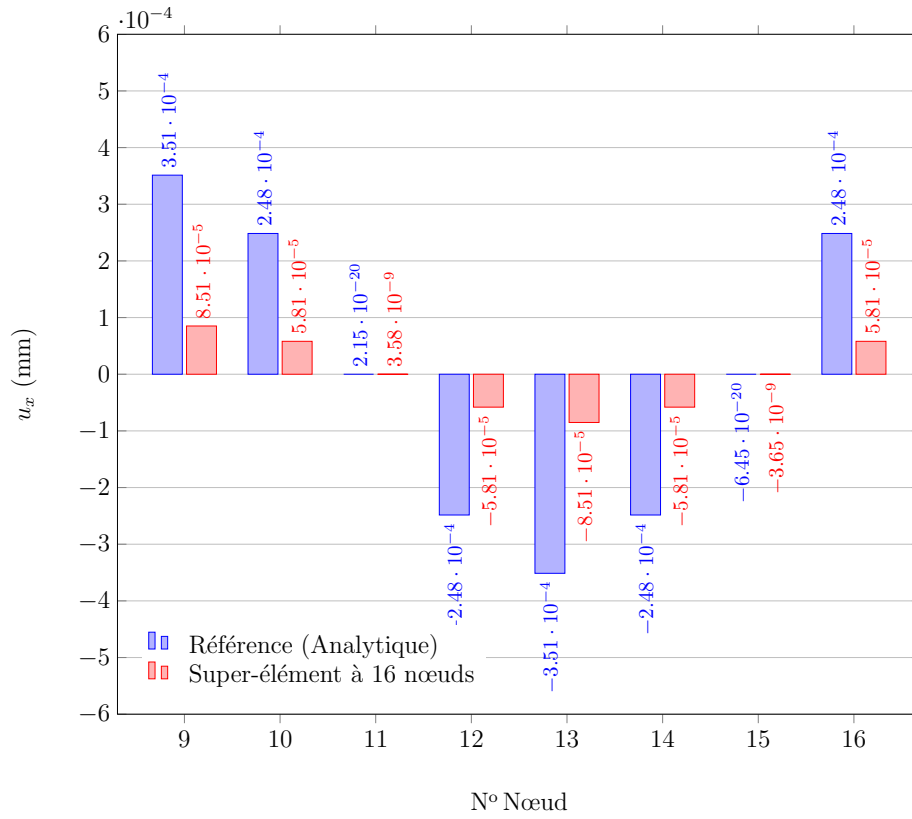


FIGURE 4.18 – Déplacement u_x des nœuds internes.

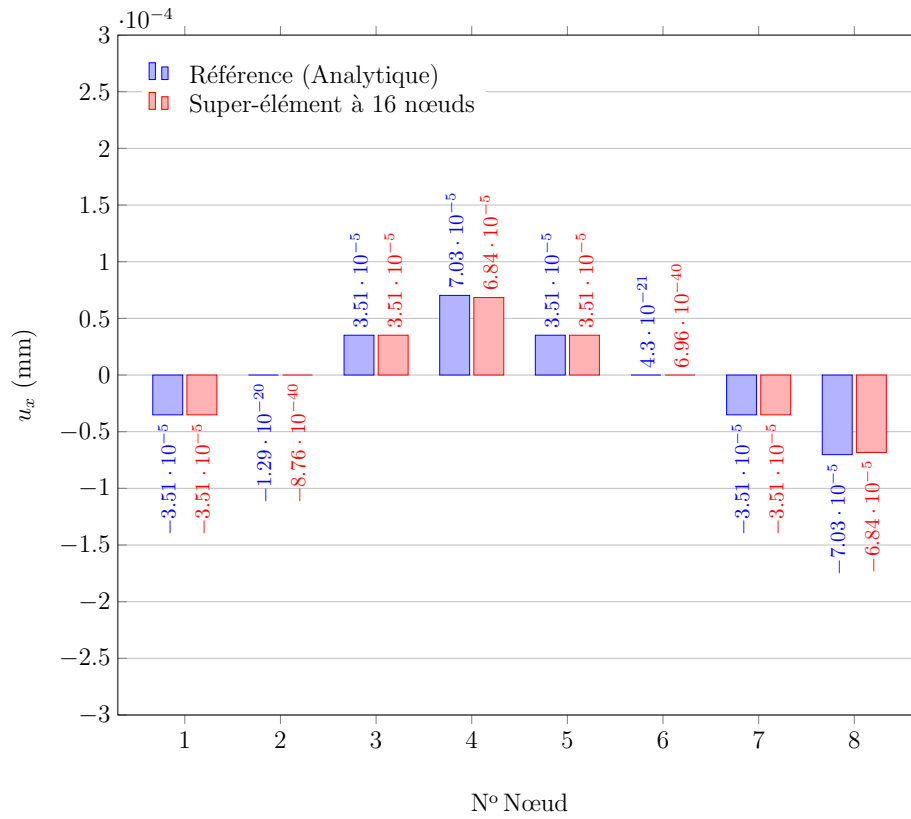


FIGURE 4.19 – Déplacement u_x des nœuds externes multiplié par le coefficient -0.37 .

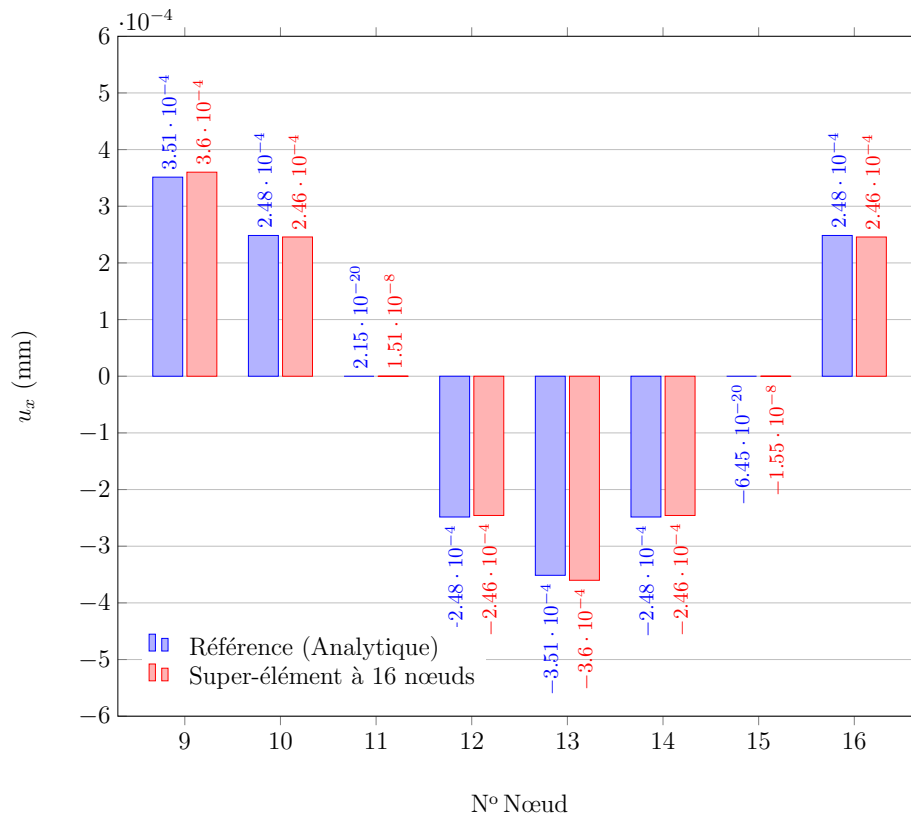


FIGURE 4.20 – Déplacement u_x des nœuds internes multiplié par le coefficient 4.23 .

Tableau 4.7 – Déplacements (u_x, u_y) aux 16 nœuds pour le cas de la pression constante uniforme de valeur 100 MPa appliquée à la perforation (mm).

Nœud	Référence (Analytique)		EF fins		Super-élément à 16 nœuds	
	u_x	u_y	u_x	u_y	u_x	u_y
1	$-3.5135e^{-5}$	$-3.5135e^{-5}$	$-3.5135e^{-5}$	$-3.5135e^{-5}$	$9.4903e^{-5}$	$9.4896e^{-5}$
2	$-1.2908e^{-20}$	$-7.0270e^{-5}$	$-1.6395e^{-43}$	$-7.0272e^{-5}$	$2.3687e^{-39}$	$1.8476e^{-4}$
3	$3.5135e^{-5}$	$-3.5135e^{-5}$	$3.5135e^{-5}$	$-3.5135e^{-5}$	$-9.4901e^{-5}$	$9.4894e^{-5}$
4	$7.0270e^{-5}$	0	$7.0272e^{-5}$	$1.3733e^{-43}$	$-1.8479e^{-4}$	$-2.2611e^{-39}$
5	$3.5135e^{-5}$	$3.5135e^{-5}$	$3.5135e^{-5}$	$3.5135e^{-5}$	$-9.4905e^{-5}$	$-9.4897e^{-5}$
6	$4.3028e^{-21}$	$7.0270e^{-5}$	$-6.7262e^{-43}$	$7.0272e^{-5}$	$-1.8824e^{-39}$	$-1.8476e^{-4}$
7	$-3.5135e^{-5}$	$3.5135e^{-5}$	$-3.5135e^{-5}$	$3.5135e^{-5}$	$9.4902e^{-5}$	$-9.4894e^{-5}$
8	$-7.0270e^{-5}$	$8.6056e^{-21}$	$-7.0272e^{-5}$	$7.0205e^{-43}$	$1.8479e^{-4}$	$2.0415e^{-39}$
9	$3.5135e^{-4}$	0	$3.5135e^{-4}$	$-3.8816e^{-43}$	$8.5136e^{-5}$	$3.8949e^{-9}$
10	$2.4844e^{-4}$	$2.4844e^{-4}$	$2.4845e^{-4}$	$2.4845e^{-4}$	$5.8096e^{-5}$	$5.8082e^{-5}$
11	$2.1514e^{-20}$	$3.5135e^{-4}$	$4.6859e^{-42}$	$3.5135e^{-4}$	$3.5756e^{-9}$	$8.5117e^{-5}$
12	$-2.4844e^{-4}$	$2.4844e^{-4}$	$-2.4845e^{-4}$	$2.4845e^{-4}$	$-5.8091e^{-5}$	$5.8077e^{-5}$
13	$-3.5135e^{-4}$	$4.3028e^{-20}$	$-3.5135e^{-4}$	$-5.0671e^{-42}$	$-8.5136e^{-5}$	$-3.3181e^{-9}$
14	$-2.4844e^{-4}$	$-2.4844e^{-4}$	$-2.4845e^{-4}$	$-2.4845e^{-4}$	$-5.8095e^{-5}$	$-5.8082e^{-5}$
15	$-6.4542e^{-20}$	$-3.5135e^{-4}$	$-1.1491e^{-43}$	$-3.5135e^{-4}$	$-3.6537e^{-9}$	$-8.5118e^{-5}$
16	$2.4844e^{-4}$	$-2.4844e^{-4}$	$2.4845e^{-4}$	$-2.4845e^{-4}$	$5.8090e^{-5}$	$-5.8077e^{-5}$

solution analytique, aux positions nodales du super-élément, montre qu'il existe certaines correspondances entre les valeurs associées aux nœuds externes et celles associées aux nœuds internes. Par exemple, la valeur du déplacement u_x associée au nœud n° 9 vaut exactement 10 fois la valeur du déplacement u_x associée au nœud n° 3 et au nœud n° 5 (Tableau 4.7). Cette tendance n'est pas retrouvée pour les déplacements calculés avec le super-élément.

Remarquons que lorsque le déplacement u_x ou u_y doit être théoriquement nul, il l'est également avec le super-élément. Le calcul du déplacement dans ce cas est malgré tout moins précis pour les nœuds internes que pour les nœuds externes. Ceci s'explique par le fait que les conditions de symétrie sont imposées aux nœuds externes (Nœuds n° 2, 4, 6 et 8), mais ne le sont pas aux nœuds internes¹¹ (Nœuds n° 9, 11, 13 et 15). Ensuite, il est important de noter que la symétrie du chargement est bien respectée à la fois pour les nœuds externes et internes du super-élément. Par exemple, sur la frontière externe u_x (Nœud n° 4) vaut $-1.8479e^{-4}$ mm et u_x (Nœud n° 9) vaut $1.8479e^{-4}$ mm, et sur la frontière interne u_y (Nœud n° 11) vaut $8.5117e^{-5}$ mm et u_y (Nœud n° 15) vaut $-8.5118e^{-5}$ mm. Un autre point intéressant est que certaines proportions observées sur la solution analytique, qui sont caractéristiques du chargement, sont également vérifiées avec le super-élément. Des relations entre les déplacements u_x et u_y des nœuds d'une même frontière sont effective-

11. Les nœuds de la perforation du super-élément ne sont pas connus avant de lancer le calcul, ils sont ajoutés à l'étape d'initialisation du super-élément.

ment observées. Par exemple, le déplacement u_x calculé avec la solution analytique aux positions des nœuds n° 4 et n° 9 est tel que :

$$\begin{aligned} u_x(\text{Nœud n° 4}) &= 2 \times u_x(\text{Nœud n° 3}) \\ u_x(\text{Nœud n° 9}) &= \sqrt{2} \times u_x(\text{Nœud n° 10}) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Les mêmes déplacements calculés avec le super-élément sont tels que :

$$\begin{aligned} u_x(\text{Nœud n° 4}) &= 1.9472 \times u_x(\text{Nœud n° 3}) \\ &\approx 2 \times u_x(\text{Nœud n° 3}) \\ u_x(\text{Nœud n° 9}) &= 1.4654 \times u_x(\text{Nœud n° 10}) \\ &\approx \sqrt{2} \times u_x(\text{Nœud n° 10}) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Enfin, si toutes les valeurs du déplacement u_x et u_y obtenues aux nœuds externes sont multipliées par le coefficient -0.37 (Figure 4.19 pour u_x et Figure I.3 pour u_y), et que dans le même temps toutes les valeurs du déplacement u_x et u_y obtenues aux nœuds internes sont multipliées par le coefficient 4.23 (Figure 4.20 pour u_x et Figure I.4 pour u_y), alors l'erreur est inférieure à 3% par rapport aux valeurs analytiques. Il existe donc une erreur systématique sur les deux composantes du déplacement des nœuds externes et des nœuds de la perforation.

En résumé, même si les déplacements nodaux obtenus avec le super-élément sont différents des déplacements de référence, les résultats sont encourageants puisque beaucoup de similitudes et de propriétés sont respectées. Il s'agit donc de vérifier l'implémentation du modèle. Pour cela, il semble important de vérifier que le calcul du second membre \mathbf{f} dans lequel le chargement de la perforation est pris en compte est optimal. L'implémentation de l'intégration numérique sur la perforation, en particulier, semble être une piste intéressante à investiguer. Il s'agira d'évaluer, pour le cas-test, toutes les intégrales du principe puis de comparer ces valeurs théoriques à celles de modèle numérique.

La reconstruction des champs de contraintes et de déplacements à l'intérieur du super-élément dont la perforation est soumise à un effort de pression est maintenant proposée. Il est évident que la solution reconstruite à partir des déplacements des 16 nœuds du super-élément, qui comportent des erreurs (Tableau 4.7), ne sera pas précise. Mais, elle pourrait aider à diagnostiquer l'origine des écarts observés aux nœuds.

La solution complète du problème est décomposée en la somme d'une solution homogène dépendante de paramètres variables et d'une solution particulière connue en tous points du domaine étudié. La reconstruction des champs de contraintes et de déplacements à l'intérieur de l'élément est donc équivalente à la reconstruction de la solution homogène. Par contre, les déplacements aux 16 nœuds du super-élément calculés avec ZéBuLoN (Tableau 4.7) correspondent aux déplacements de la solution complète, $\mathbf{u}(x_i, y_i)$. Ainsi, pour reconstruire la solution homogène, les déplacements obtenus avec la solution particulière

Tableau 4.8 – Valeur des paramètres (α_j, β_j) pour la reconstruction de la solution homogène $(\mathbf{u}^h, \boldsymbol{\sigma}^h)$ (16 paramètres).

j	α_j	β_j
-3	-0.0272	$2.2190e^{-9}$
-2	$-1.3324e^{-7}$	$-1.5193e^{-6}$
-1	$-3.2859e^{-5}$	$2.3403e^{-5}$
0	$-3.5525e^{-6}$	$3.3437e^{-7}$
1	-2.7590	$-1.7453e^{-8}$
2	$-6.9131e^{-8}$	$1.4973e^{-7}$
3	$5.9239e^{-8}$	$-3.3076e^{-7}$
4	$-7.3423e^{-10}$	$5.1756e^{-9}$

aux coordonnées des 16 nœuds du super-élément doivent être retirés des déplacements obtenus avec ZéBuLoN, $\mathbf{u}^h(x_i, y_i) = \mathbf{u}(x_i, y_i) - \mathbf{u}^p(x_i, y_i)$.

Comme cela a été précisé précédemment, la solution homogène \mathbf{u}^h pour ce cas-test doit être proche de zéro en tous points. Pour cela, les valeurs des déplacements homogènes évalués aux 16 nœuds doivent être quasiment nulles. Cela n'étant pas observé, les paramètres (α_j, β_j) de la solution homogène sont donc identifiés. Certains prennent une valeur significative (Tableau 4.8) : α_{-3} et α_1 . Ce dernier est le paramètre caractéristique de la traction uniaxiale (cf. Section 3.3.1). Sa contribution a d'ailleurs une forte influence sur le calcul de la solution homogène, comme on peut l'observer sur la Figure 4.21. Notons qu'ici il s'agit, plus précisément, d'une compression uniaxiale puisque $\alpha_1 < 0$.

Les résultats obtenus pour la solution complète sont illustrés dans la Figure 4.22 et sont comparés à la solution de référence analytique sur l'axe des abscisses. Des résultats contre-intuitifs, dus à l'influence de \mathbf{u}^h , sont évidemment observés sur les déplacements u_x au voisinage de la frontière externe du super-élément. Les résultats obtenus pour les déplacements au voisinage de la perforation sont cohérents avec la référence, mais sont cependant sous-estimés (Figure 4.22(d)). De ce fait, les contraintes en bord de perforation sont moins importantes qu'attendu (Figure 4.22(b)) ; la contrainte de von Mises maximale calculée étant de 130 MPa, et celle de référence étant de 173 MPa. Par contre, il est intéressant de noter que la solution est reconstruite avec précision à l'intérieur du super-élément lorsque les déplacements nodaux sont en quelque sorte corrigés (i.e., valeur des déplacements nodaux des Figures 4.19, 4.20, I.3, et I.4). Dans ce cas, la plus petite valeur de (α_j, β_j) identifiée est de l'ordre de 10^{-4} , et par conséquent la solution homogène reconstruite est proche de zéro (e.g., la valeur maximale parmi toutes les composantes des contraintes homogènes est inférieure à 0.1 MPa, et les déplacements homogènes (u_x^h, u_y^h) sont inférieurs à $4e^{-7}$ mm).

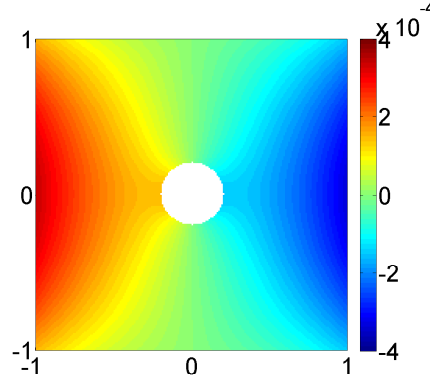


FIGURE 4.21 – Distribution du déplacement homogène u_x^h obtenue avec le super-élément perforé à 16 nœuds, déterminée à partir des paramètres (α_j, β_j) identifiés dans le Tableau 4.8.

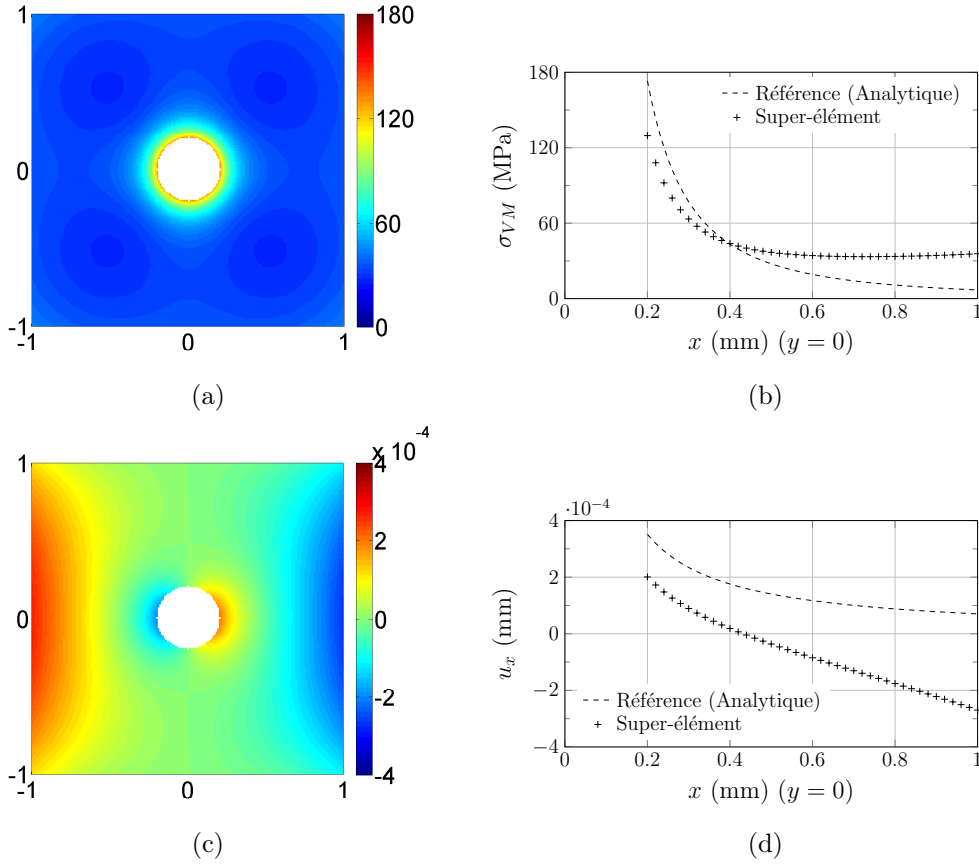


FIGURE 4.22 – Résultats obtenus avec le super-élément perforé à 16 nœuds lorsque la perforation est soumise à une pression constante uniformément répartie sur le contour du trou de valeur $P = 100$ MPa. Comparaison avec la solution de référence analytique. (a) Contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} dans le domaine perforé et (b) le long de l'axe $\{y = 0\}$, (c) Déplacement u_x dans le domaine perforé et (d) le long de l'axe $\{y = 0\}$.

4.4 Synthèse

Le super-élément perforé à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur sa perforation, dont la formulation a été proposée dans le Chapitre 2 et dont les fonctions d'interpolation ont été analysées dans le Chapitre 3, a été implémenté et validé en partie dans ce chapitre.

L'implémentation du nouveau super-élément perforé dans le code EF implicite ZéBuLoN a, dans un premier temps, été proposée. Les différents objets et méthodes nécessaires à l'implémentation des nœuds sur la perforation du super-élément sont également décrits.

Dans un second temps, la formulation du nouveau super-élément et son implémentation a été évaluée. La première étape du processus de validation a consisté à évaluer la cohérence et la précision des champs mécaniques calculés lorsque des chargements transitent uniquement par la frontière externe du super-élément (e.g., pas de chargement appliqué à la perforation). Cette étape a permis de vérifier la non-régression des résultats par rapport au super-élément perforé à 8 nœuds. Il a été montré que les déplacements nœaux, et en particulier ceux de la perforation, sont correctement évalués avec le nouveau super-élément pour la plupart des cas de chargements externes analysés (traction uniaxiale et biaxiale, et de cisaillement pur). Les résultats sont d'ailleurs globalement plus proches des données de référence comparé au super-élément sans nœuds internes. Cependant, il semble que les cas de chargement faisant intervenir des modes de déplacements rigides soient difficiles à modéliser. En effet, les déplacements nœaux obtenus, et en particulier ceux des nœuds internes, dans le cas d'un cisaillement simple présentent des écarts plus significatifs en comparaison avec les résultats de référence. Malgré tout, les champs de contraintes et de déplacements réinterpolés à l'intérieur du super-élément sont calculés avec précision quel que soit le chargement externe appliqué, et sont d'ailleurs similaires à ceux obtenus avec le super-élément à 8 nœuds. L'influence du nombre de points de Gauss nécessaire à l'intégration numérique de la matrice de rigidité sur la précision du super-élément a également été évaluée. Il a été mis en évidence que les résultats les plus précis sont obtenus avec une règle d'intégration à 4 points de Gauss. Finalement, une étude complémentaire sur la réinterpolation des champs avec 32 paramètres (au lieu de 16), à partir des déplacements nœaux calculés avec le super-élément, a été proposée. Les résultats obtenus sont cohérents avec les conclusions du Chapitre 3. En effet, si les cas de traction ne montrent aucun problème particulier, des écarts, principalement localisés au voisinage de la frontière externe du super-élément, sont observés pour les cas de cisaillement. Le mauvais conditionnement du système à l'ordre 8 associé à des paramètres parasites et à des imprécisions numériques sur les déplacements nœaux sont à l'origine de ces écarts.

La seconde étape du processus de validation a consisté à évaluer le super-élément lorsqu'un

chargement est appliqué sur la perforation (pas de chargement externe). La solution particulière de la pression constante uniformément répartie sur le contour de la perforation a été sélectionnée pour valider la formulation du super-élément. Les résultats obtenus pour les déplacements nodaux mettent en évidence quelques incohérences (signe opposé, ordres de grandeur incorrects, etc.). Malgré tout, plusieurs points positifs, relatifs à la symétrie du chargement ou encore au respect de proportions entre déplacements nodaux, sont mis en évidence et sont encourageants. La reconstruction des champs montre, par conséquent, des différences avec les résultats de référence. Une piste privilégiée pour améliorer la précision des déplacements obtenus aux 16 nœuds du super-élément concerne l'implémentation du second membre et en particulier l'intégration numérique sur la frontière de la perforation.

Les développements à venir consisteront donc, dans un premier temps, à terminer la validation du super-élément pour une pression appliquée à sa perforation. Il s'agira ensuite de vérifier la précision de l'élément lorsqu'un chargement externe est combiné à un chargement de pression. Dans un second temps, le nouveau super-élément sera évalué pour des chargements internes plus généraux en considérant la solution analytique particulière d'une plaque perforée soumise à des forces concentrées sur le contour du trou¹². Cette dernière est beaucoup plus adaptée à la problématique de la modélisation de l'interaction entre un super-élément perforé et un élément rivet.

12. La solution particulière des forces concentrées a été implémentée dans ZéBuLoN.

Conclusion et perspectives

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire de thèse concerne la modélisation des assemblages rivetés dans les calculs de structures aéronautiques. Les travaux s'inscrivent, plus particulièrement, dans un axe de recherche qui vise à représenter l'assemblage riveté au moyen d'un modèle de connecteur reliant deux super-éléments de plaque perforée. L'utilisation de super-éléments pour la modélisation des tôles perforées a pour objectif de prendre en compte l'influence des perforations à l'échelle de la structure. Elle a également pour but de permettre la modélisation de certains modes de rupture tels que l'arrachement de la tôle en bord de perforation, ou encore le passage au travers de la fixation, qui est aujourd'hui impossible. L'étude s'est focalisée, en particulier, sur la problématique de la modélisation de l'interaction entre un modèle de rivet et un modèle de plaque perforée. Pour répondre à cette problématique, les travaux ont porté sur la formulation d'un super-élément perforé, comportant des nœuds sur sa frontière interne, à même de gérer à terme l'interaction avec un modèle de rivet.

Dans un premier temps, une synthèse bibliographique a été proposée dans le Chapitre 1. Différentes méthodes numériques classiquement utilisées pour représenter une discontinuité dans un milieu ont tout d'abord été présentées. Ces méthodes sont, cependant, inadaptées à la problématique posée : soit parce qu'elles ne peuvent pas être appliquées aux calculs de structures (coût important pour représenter la perforation), soit parce qu'elles ne permettent pas la représentation de l'assemblage et des interactions qui se produisent entre le rivet et la plaque perforée. L'étude bibliographique s'est donc tournée vers les super-éléments.

Les concepts nécessaires à la compréhension des fondements théoriques des super-éléments, comme les méthodes de décomposition de domaine ou encore la notion de principes variationnels, ont été présentés. L'analyse bibliographique a, ensuite, mis en évidence l'existence de nombreux super-éléments capables de modéliser des discontinuités géométriques (e.g., trou, fissure) et matérielles (e.g., inclusion). Ces éléments finis sont particulièrement adaptés à la notion de calculs de structures car ils apportent des résultats très précis avec peu de degrés de liberté ; le maillage de la discontinuité n'étant pas nécessaire. L'étude a, notamment, montré que la méthode des variables complexes, largement

utilisée, permet de formuler des fonctions d'interpolation capables de prendre en compte la présence d'une discontinuité sur la distribution des champs en son voisinage.

Enfin, nous nous sommes intéressés à la formulation de deux super-éléments de la littérature intégrant la présence d'une perforation. Ils se distinguent, pour répondre à notre problématique, en termes de capacité à localiser les champs mécaniques au voisinage de la perforation, d'adaptation aux calculs de structures (temps de calcul), et de capacité à représenter l'assemblage riveté (interaction entre le rivet et la perforation). Le premier est un super-élément hybride-Trefftz déplacement à 8 nœuds qui comporte une perforation circulaire dont la capacité à prédire la distribution des champs mécaniques au voisinage de la perforation pour différents cas de chargement externes est démontrée. Le second comporte également une perforation circulaire mais possède une particularité intéressante puisque ses fonctions d'interpolation sont exprimées en fonction de degrés de liberté physiques.

La démarche mise œuvre pour modéliser l'interaction entre le modèle de rivet et le modèle de plaque perforée a été développée dans le Chapitre 2. Pour cela, un nouveau super-élément perforé comportant des nœuds sur sa frontière interne a été formulé.

Tout d'abord, le principe variationnel associé au nouveau super-élément a été développé. Une spécificité introduite dans le principe est que la compatibilité des déplacements n'est assurée que sur la frontière externe du super-élément (i.e., compatibilité avec les éléments finis conventionnels voisins). L'ordre des fonctions d'interpolation a, ensuite, été fixé à 8 afin d'établir la formulation d'un super-élément comportant, en particulier, 8 nœuds externes et 8 nœuds sur la perforation.

Dans ces travaux, il est proposé de modéliser l'interaction rivet/plaque perforée au travers des forces de contact qui s'exercent entre les nouveaux nœuds de la perforation et une surface analytique cylindrique figurative du fût du rivet qui est attachée aux nœuds du macro-élément 1D. Grâce à la formulation de nœuds sur la perforation du super-élément, ces forces de contact pourront alors être évaluées avec des méthodes de contact classiques. Un formalisme particulier permettant d'appliquer des chargements sur le contour de la perforation a également été mis en place (e.g., pression constante uniforme, pression constante sur un arc, forces concentrées). La solution particulière des forces concentrées permet, en particulier, de considérer des chargements quelconques appliqués aux nœuds de la perforation du super-élément. Par conséquent, l'influence des forces nodales appliquées par le rivet sur la perforation sur la distribution des champs mécaniques dans l'élément perforé peut être prise en compte grâce à cette solution particulière qui est introduite dans sa formulation.

Finalement, la matrice de rigidité et le vecteur chargement du nouveau super-élément perforé ont été établis. La matrice de rigidité construite est naturellement symétrique et

s'exprime sous la forme de 4 blocs. Chaque bloc est une matrice pleine, ce qui traduit bien le couplage existant entre les nœuds de la frontière externe et ceux de la frontière interne. Le vecteur chargement est quant à lui construit à partir des champs de contraintes et de déplacements particuliers, ce qui permet d'appliquer des chargements à la perforation du super-élément. Il a d'ailleurs été montré que le vecteur chargement est nul lorsqu'aucun chargement n'est appliqué à la perforation. Enfin, il a été démontré que la formulation du super-élément perforé avec nœuds internes proposée est une généralisation de la formulation du super-élément perforé qui ne comporte pas de nœuds internes.

Dans le Chapitre 3, les fonctions d'interpolation du super-élément perforé à 16 nœuds, formulé dans le Chapitre 2, ont été analysées. Pour cela, leur capacité et leur précision à reconstruire les champs de contraintes et de déplacements ont été évaluées. En particulier, l'influence des nœuds supplémentaires positionnés sur la perforation du super-élément et de l'augmentation de l'ordre des fonctions à 8 a été étudiée.

Une première analyse a mis en évidence que les fonctions d'interpolation du super-élément perforé à 16 nœuds, i.e. calculées à l'ordre 8, sont moins précises que celles du super-élément perforé à 8 nœuds, i.e. calculées à l'ordre 4. Ce résultat est contre-intuitif puisque plus l'ordre est grand, plus le nombre de paramètres pour décrire la solution est grand. Les fonctions d'interpolation, qui proviennent du formalisme de Kolosov-Muskhelishvili, se révèlent donc sensibles avec l'augmentation de l'ordre. Ce phénomène est, en fait, lié au conditionnement du système linéaire établi pour identifier les paramètres (α_j, β_j) de la solution. En effet, il a été mis en évidence que le conditionnement du système linéaire associé aux fonctions calculées à l'ordre 8 est moins bon que celui associé aux fonctions calculées à l'ordre 4. Par conséquent, cela signifie que plus l'ordre est grand, plus l'identification des paramètres (α_j, β_j) est sensible aux éventuelles imprécisions numériques dans les données d'entrée (déplacements).

Ce résultat a été vérifié dans une seconde analyse, dans laquelle des imprécisions numériques ont été introduites dans les données d'entrée *via* l'utilisation de solutions de référence numériques et non plus analytiques. Il a été montré que ces approximations n'ont pas d'influence sur le calcul des paramètres significatifs quels que soient la configuration, l'ordre, ou le cas de chargement étudiés. Par contre, l'analyse a mis en évidence l'apparition de paramètres, dits parasites, qui influent sur la reconstruction de la solution lorsque les fonctions sont calculées à l'ordre 8. En effet, malgré leur valeur proche de zéro et négligeable devant celle des paramètres significatifs, ils ajoutent à la solution la contribution de modes parasites et entraînent des écarts localisés, parfois importants, sur la distribution des champs de contraintes et de déplacements dans le domaine perforé par rapport à la référence. Ces paramètres n'ont pas d'influence lorsque les fonctions sont calculées à l'ordre 4 car, tout simplement, ils n'interviennent pas dans la série tronquée correspondante. De plus, il a été remarqué que les écarts observés à l'ordre 8 ne l'étaient pas dans la première analyse où les données d'entrée provenaient de solutions analytiques

puisque le calcul des paramètres, et en particulier celui des paramètres parasites, était plus précis. Malgré tout, les champs de contraintes et de déplacements obtenus avec les fonctions d'interpolation du super-élément à 16 nœuds sont globalement bien reconstruits, et sont particulièrement précis au voisinage de la perforation, qui est la zone à laquelle on s'intéresse tout particulièrement. Les écarts observés n'ont donc pas été jugés comme étant des obstacles à la poursuite des travaux.

Le super-élément perforé à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur sa perforation a été implémenté et validé dans le Chapitre 4.

Dans un premier temps, l'implémentation du super-élément perforé dans le code EF implicite ZéBuLoN a été proposée. Grâce à un système de plugins, le code du super-élément est non-intrusif et a donc été facilement intégrable dans l'architecture du code principal. Les différents objets et méthodes nécessaires à l'implémentation d'une frontière interne EF et de nœuds pour la modélisation de la perforation du super-élément ont également été proposés.

Dans un second temps, la formulation du nouveau super-élément a été évaluée en deux étapes. La première étape de validation a consisté à vérifier la non-régression des résultats par rapport au super-élément perforé à 8 nœuds. Pour cela, la cohérence et la précision des champs mécaniques calculés à l'intérieur de l'élément lorsque des chargements transitent uniquement par la frontière externe du super-élément (e.g., pas de chargement appliqué à la perforation) ont donc été évaluées. Il a été montré que les déplacements nœaux, et en particulier ceux de la perforation, sont évalués avec précision avec le nouveau super-élément pour la plupart des cas de chargements externes analysés (traction uniaxiale et biaxiale, et de cisaillement pur), et sont globalement plus précis que ceux obtenus avec le super-élément sans nœuds internes. Par contre, les déplacements nœaux obtenus dans le cas d'un cisaillement simple, qui est le seul cas faisant intervenir un mode rigide, présentent des écarts significatifs en comparaison avec les résultats de référence. Malgré tout, les champs de contraintes et de déplacements réinterpolés à l'intérieur du super-élément sont calculés avec précision quel que soit le chargement externe appliqué, et sont similaires à ceux obtenus avec le super-élément à 8 nœuds. Ensuite, il a été mis en évidence que les résultats les plus précis sont obtenus avec une règle à 4 points de Gauss pour l'intégration numérique de la matrice de rigidité du super-élément. Enfin, une étude complémentaire sur la réinterpolation des champs avec 32 paramètres au lieu de 16, à partir des déplacements nœaux calculés avec le super-élément, a confirmé les mêmes tendances que celles observées dans le Chapitre 3. En effet, des écarts principalement localisés au voisinage de la frontière externe du super-élément sont observés pour les cas de cisaillement ; l'origine de ces écarts étant liée au mauvais conditionnement du système linéaire calculé à l'ordre 8 qui induit des paramètres parasites et des imprécisions numériques sur les déplacements nœaux.

La seconde étape du processus de validation a consisté à évaluer le super-élément lors-

qu'un chargement est appliqué sur la perforation (pas de chargement externe). Le choix de la solution particulière de la pression constante uniformément répartie sur le contour de la perforation s'est naturellement imposé pour valider la formulation du super-élément, du fait de sa facilité d'implémentation. Les résultats obtenus pour les déplacements nodaux mettent en évidence quelques incohérences (signe opposé, ordres de grandeur incorrects, etc.). Malgré tout, plusieurs points positifs, relatifs à la symétrie du chargement ou encore au respect de proportions entre déplacements nodaux, sont mis en évidence et sont encourageants pour la poursuite des travaux.

Les perspectives à court terme concernent donc la finalisation de la validation du super-élément lorsqu'une pression constante uniforme est appliquée sur le contour de la perforation. Il s'agira notamment de vérifier que le second membre associé au super-élément est correctement pris en compte dans le calcul EF global, et que l'intégration numérique sur la frontière de la perforation, en particulier, est correcte. Après cette étape de validation finalisée, le super-élément pourra alors être testé pour différents cas de chargements combinant notamment une pression interne avec un chargement externe quelconque. Ensuite, la solution d'une plaque perforée dont la perforation est soumise à des forces concentrées étant implémentée dans le calcul du second membre du super-élément, il s'agira alors d'évaluer la cohérence et la précision des résultats obtenus lorsque des forces concentrées définies par l'utilisateur sont appliquées aux nœuds de la perforation du super-élément. Enfin, dans l'objectif de mettre en place l'interaction entre un corps et la frontière interne EF du super-élément, un premier test consistera à mettre en contact le super-élément perforé avec un pion maillé finement à l'intérieur de la perforation (expérience de matage). La méthode de flexibilité qui est disponible dans ZéBuLoN et qui permet de gérer le contact entre deux corps sera notamment testée ; d'autant plus qu'elle apparaît particulièrement adaptée à la problématique puisque les forces de contact sont calculées *a priori*.

Les perspectives envisagées à moyen et long terme concernent plusieurs sujets. Premièrement, la précision des champs mécaniques réinterpolés avec les fonctions d'interpolation calculées à l'ordre 8 pourra être améliorée. Pour cela, une méthode de préconditionnement pourrait être évaluée comme évoqué dans la Section 3.4.2. Une méthode de sélection de paramètres pourrait également être mise en place. En effet, étant donnée la présence de paramètres parasites, dont leur valeur est proche de zéro, qui perturbent la reconstruction des champs à l'ordre 8, une méthode systématique basée sur les méthodes de bases réduites (e.g., la POD) permettant de sélectionner les paramètres les plus significatifs pourrait être envisagée (Section 3.4.2).

Deuxièmement, les fonctions d'interpolation du super-élément sont calculées à partir de la solution analytique d'une plaque perforée dont le comportement est élastique linéaire. Le super-élément est donc, aujourd'hui, restreint à des calculs élastiques linéaires. Par conséquent, une perspective essentielle consiste à étendre la formulation de l'élément à

des comportements matériau non-linéaires, et notamment élasto-plastiques. D'une part, les travaux de Nottrot [115] et de Meyer [116] pourront être étudiés. Ils reposent sur l'idée qu'une zone plastique en bord de perforation se forme lorsqu'un chargement dépasse la limite élastique du matériau de la plaque. L'expression des champs de contraintes et de déplacements dans la plaque perforée sont alors recherchés dans les zones purement élastique et purement plastique. Nottrot calcule la solution dans la zone plastique au moyen de la méthode des caractéristiques et s'intéresse à la détermination du contour limite entre la zone plastique et la zone élastique. Meyer exprime, quant à elle, les déplacements et les contraintes dans la zone plastique au moyen d'un développement asymptotique qui dépend d'un petit paramètre correspondant à l'angle qui caractérise l'extension de la zone plastique en bord de perforation. Elle s'intéresse, tout particulièrement, à l'influence de la zone plastique sur les champs élastiques calculés à proximité de cette zone et s'intéresse donc au raccord de ces deux solutions au niveau de la limite. Ces développements pourraient être intéressants en première approximation. D'autre part, une idée qui apparaît beaucoup plus appropriée consisterait à enrichir les fonctions d'interpolation « élastiques » avec des modes « plastiques ». Pour cela, une technique développée par Pommier *et al.* [12, 47, 117, 118] pour la simulation numérique de la fissuration par fatigue est particulièrement intéressante. Elle repose sur une approche locale, au sens où des calculs EF très fins sont réalisés, qui consiste à calculer l'évolution des contraintes et des déformations dans la région située en pointe de fissure en tenant compte du comportement élasto-plastique cyclique du matériau. Une méthode de changement d'échelle, basée sur une approximation de la cinématique en pointe de fissure, est ensuite appliquée afin d'identifier un modèle de comportement élasto-plastique cyclique de cette région qui sera finalement utilisé à une échelle globale. Les calculs à l'échelle locale sont effectués une fois pour toute, et le modèle ainsi identifié est ensuite employé tel quel pour différents types de chargements. Le champ de déplacements (ou le champ de vitesses par dérivation) est, en fait, supposé se décomposer en une partie élastique et une partie plastique. Chacune des deux parties est supposée être le produit d'un facteur d'intensité (fonction du temps) et d'un champ spatial de référence (fonction de la variable spatiale uniquement). Les champs spatiaux de référence *élastiques* peuvent être calculés à partir d'une solution analytique (i.e., solution asymptotique de Westergaard dans le cadre de la fissuration où les facteurs d'intensité pour chaque mode est fixé à 1), ou à partir d'une solution numérique (i.e., un calcul EF élastique est réalisé avec les conditions aux limites telles que le facteur d'intensité de contraintes soit égal à 1 pour chaque mode de rupture). L'avantage d'utiliser une solution numérique est que les champs de référence ainsi calculés sont aussi valables loin de la pointe de fissure contrairement à l'utilisation d'une solution analytique. Les champs spatiaux de référence *plastiques* (ou *complémentaires*), qui permettent de caractériser les effets des déformations plastiques qui ont lieu dans la région en pointe de fissure à l'échelle globale, peuvent quant à eux être calculés à partir de calculs EF fins élasto-plastiques et de la décomposition de Karhunen-Loève. Pour chaque mode de rupture, le facteur d'intensité de contraintes élastique est évalué en projetant la solution numérique obtenue sur le champ de référence calculé précédemment. Le champ de déplacements ré-

sidu, qui correspond à la différence entre la solution numérique et la partie plastique du champ de déplacements complètement connue, est finalement décomposé en la somme de champs spatiaux orthogonaux deux à deux et de facteurs dépendant du temps, par la transformation de Karhunen-Loève. La méthode des *Snapshots*, développée par Sirovich [109], permet de construire cette base orthogonale *via* la construction de la matrice de corrélation spatiale. Les vecteurs propres de cette matrice forment une base orthogonale de champs spatiaux, et les plus significatifs sont notamment ceux dont la valeur propre associée est la plus grande [47]. Finalement, les champs spatiaux de référence peuvent être considérés comme les fonctions de forme du champ de déplacements en pointe de fissure. Ce dernier est alors complètement défini à l'échelle globale par quelques variables qui sont les facteurs d'intensité de contrainte élastiques et plastiques pour chaque mode. Un intérêt particulier est porté à cette méthodologie car les fonctions d'interpolation du super-élément pourraient être enrichies par des champs de référence plastiques déterminés au moyen d'un nombre fini de calculs EF fins élasto-plastiques réalisés comme une étape préliminaire et de la décomposition de Karhunen-Loève.

Troisièmement, l'objectif est d'adapter l'élément perforé aux calculs dynamiques, et notamment de l'implémenter dans le code de recherche dédié au calcul explicite Europlexus¹³. Il est donc nécessaire de calculer la matrice de masse du super-élément. Si en première approximation la masse totale pourrait être répartie aux nœuds de l'élément, il serait intéressant d'évaluer la façon dont est calculée la matrice de masse d'un élément spectral [119]. Les éléments spectraux sont des éléments codés dans Europlexus qui ont des fonctions particulières et qui sont utilisés pour la résolution de problèmes de propagation des ondes élastiques. La zone d'intérêt (non-linéaire, géométrie complexe) est modélisée avec des EF classiques non-linéaires, la zone linéaire est modélisée avec des éléments spectraux, les deux zones étant raccordées avec une interface mortar. Ensuite, les travaux de Menouillard *et al.* [120] et de Elguedj *et al.* [121] pourraient être intéressants puisqu'ils proposent des techniques de *mass lumping* (i.e. diagonalisation de la matrice masse) pour un élément qui contient une discontinuité dans le contexte de la X-FEM.

Finalement, dans l'objectif de formuler un super-élément de coque perforée, les perspectives proposées par Leconte [9] pour le calcul des fonctions d'interpolation du super-élément de coque perforée restent valables. De plus, dans le contexte de la modélisation de l'interaction entre le super-élément perforé et le macro-élément rivet, l'utilisation d'une solution particulière avec forces concentrées comme présentée dans le manuscrit n'est plus appropriée car elle ne permet pas de gérer des forces hors-plan. Il s'agira alors d'étendre cette solution pour exprimer les champs de contraintes et de déplacements dans le super-élément coque lorsque des forces concentrées hors-plan sont appliquées sur le contour de la perforation.

13. Europlexus est un logiciel EF pour le traitement de la dynamique rapide non-linéaire (fluides et structures), développé notamment par le Centre Commun de Recherche d'Ispra (Italie), le CEA et l'Onera.

Bibliographie

- [1] B. Driffill. GARTEUR Bird Strike Group - Round Robin Work Package : Metallic Structures Phase 1 - Task 2 & Phase 2 - Task 1. 2000.
- [2] R.L. Veldman, J. Ari-Gur, and C. Clum. Response of pre-pressurized reinforced plates under blast loading. *International Journal of Impact Engineering*, 35 :240–250, 2008.
- [3] A. Combescure, F. Delcroix, L. Caplain, S. Espanol, and P. Eliot. A finite element to simulate the failure of weld points on impact. *International Journal of Impact Engineering*, 28 :783–802, 2003.
- [4] B. Langrand, E. Deletombe, E. Markiewicz, and P. Drazétic. Riveted joint modelling for numerical analysis of airframe crashworthiness. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38 :21–44, 2001.
- [5] L. Patronelli E. Markiewicz, B. Langrand, E. Deletombe, and P. Drazétic. Analysis of riveted joint failure under mixed mode loading. *European Journal of Mechanical and Environmental Engineering*, 44(4) :223–228, 1999.
- [6] B. Langrand, L. Patronelli, E. Deletombe, E. Markiewicz, and P. Drazétic. An alternative numerical approach for full scale characterisation for riveted joint design. *Aerospace Science and Technology*, 6 :343–354, 2002.
- [7] E. Markiewicz, B. Langrand, E. Deletombe, P. Drazétic, and L. Patronelli. Analysis of the riveting process forming mechanisms. *International Journal of Materials and Product Technology*, 13(3-6) :123–145, 1998.
- [8] B. Langrand, A.S. Bayart, Y. Chauveau, and E. Deletombe. Assessment of multi-physics FE methods for bird impact modelling – Application to a metallic riveted airframe. *International Journal of Crashworthiness*, 7(4) :415–428, 2002.
- [9] N. Leconte. *Eléments finis hybride déplacement perforés pour le calcul des structures aéronautiques rivetées*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes, 2008.
- [10] N. Leconte, B. Langrand, and E. Markiewicz. On some features of a plate hybrid-Trefftz displacement element containing a hole. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46 :819–828, 2010.
- [11] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and J.Z. Zhu. *The Finite Element Method : Its Basis & Fundamentals, Sixth edition*. Elsevier, Oxford, 2005.

- [12] S. Pommier, A. Gravouil, N. Moës, and A. Combescure. *La simulation numérique de la propagation des fissures : milieux tridimensionnels, fonctions de niveau, éléments finis étendus et critères énergétiques*. Hermes Science Lavoisier, Paris, 2009.
- [13] M. Bonnet and A. Frangi. *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2006.
- [14] J. Melenk and I. Babuska. The partition of unity method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39 :289–314, 1996.
- [15] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150, 1999.
- [16] G. Dvorak. On uniform fields in heterogeneous media. *Proceedings of the Royal Society London A.*, 431 :89–110, 1990.
- [17] G. Dvorak and Y. Benveniste. On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media. *Proceedings of the Royal Society London A.*, 437 :291–310, 1992.
- [18] G. Dvorak. Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proceedings of the Royal Society London A.*, 437 :311–327, 1992.
- [19] G. Dvorak and J. Zhang. Transformation field analysis of damage evolution in composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 :2517–2541, 2001.
- [20] B. Langrand. *Ruine des structures aéronautiques rivetées aux chargements de type explosion ou pression dynamique*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Valenciennes, 2011.
- [21] N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46) :6183–6200, 2001.
- [22] A.S. Bayart. *Modélisation multi-échelle d'un assemblage riveté aéronautique : Vers un modèle de fragilisation structurale*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes, 2005.
- [23] B. Bourel. *Calcul multi-domaines et approches multi-échelles pour la simulation numérique de crashes automobiles*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2006.
- [24] H.A. Schwarz. Über einige abbildungsaufgaben. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 11 :65–83, 1869.
- [25] H. Ben Dhia. Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 326 :899–904, 1998.
- [26] J. Touzeau. *Approches numérique multi-échelle/multi-modèle de la dégradation des matériaux composites*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2012.

- [27] G. Rateau. *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles, Applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2003.
- [28] Y. Chuzel. *Caractérisation expérimentale et simulation numérique d'impacts de glace à haute vitesse*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2008.
- [29] A. Ghanem. *Contributions à la modélisation avancée des machines tournantes en dynamique transitoire dans le cadre Arlequin*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2013.
- [30] J.S. Przemieniecki. Matrix structural analysis of substructures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1 :138–147, 1963.
- [31] F.X. Roux. Méthodes de résolution par sous-domaines en statique. *La recherche Aérospatiale*, 1 :37–48, 1990.
- [32] C. Farhat and F.X. Roux. A method of finite elements tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal Numerical Methods of Engineering*, 32 :1205–1227, 1991.
- [33] P. Ladevèze and D. Dureisseix. Une nouvelle stratégie de calcul micro-macro en mécanique des structures. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 327 :1237–1244, 1999.
- [34] C. Felippa. *Advanced Finite Element Method - Chapter 7 : Weak and Variational Forms of Poisson's Equation*. University of Colorado, Spring 2013. <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/> [Accessed on 2nd December 2014].
- [35] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine, 1981.
- [36] C. Bernardi, Y. Maday, and A.T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition : the Mortar element method. In H. Brezis & J.L. Lions, editor, *Collège de France Seminar XI*, pages 13–51, Pitman, 1994.
- [37] C. Felippa. *Advanced Variational Methods in Mechanics - Chapter 13 : Hybrid Variational Principles : Formulation*. University of Colorado, Spring 2013. <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/> [Accessed on 1st September 2014].
- [38] J.A. Teixeira de Freitas. Hybrid finite element formulations for elastodynamic analysis in the frequency domain. *International Journal of Solids and Structures*, 36 :1883–1923, 1999.
- [39] C. Felippa. *Advanced Finite Element Method - Chapter 10 : Three-Dimensional Linear Elastostatics*. University of Colorado, Spring 2013. <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/> [Accessed on 17th December 2014].
- [40] C. Felippa. *Advanced Variational Methods in Mechanics - Chapter 11 : The HR Variational Principle of Elastostatics*. University of Colorado, Spring 2013.

- <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/> [Accessed on 1st September 2014].
- [41] C. Felippa. *Advanced Variational Methods in Mechanics - Chapter 12 : The Three-Field Mixed Principle of Elastostatics*. University of Colorado, Spring 2013. <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/> [Accessed on 1st September 2014].
 - [42] T.H.H. Pian and P. Tong. Basis of finite element methods for solid continua. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1 :3–28, 1969.
 - [43] P. Tong. New displacement hybrid finite element models for solid continua. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2 :73–83, 1970.
 - [44] T.H.H. Pian. State-of-the-art development of hybrid/mixed finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 21 :5–20, 1995.
 - [45] T.H.H. Pian. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 2 :1333–1336, 1964.
 - [46] N. Leconte, B. Langrand, and E. Markiewicz. Hybrid displacement plate FE formulation including a hole for the computation of full-scale aeronautic riveted structures. In *4th International Conference on Advances in Structural Engineering and Mechanics (ASEM'08)*, Jeju (South Korea), 26-28 May 2008.
 - [47] S. Pommier, P. Lopez-Crespo, and P.Y. Decreuse. A multi-scale approach to condense the cyclic elastic-plastic behaviour of the crack tip region into an extended constitutive model. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 32 :899–915, 2009.
 - [48] P. Tong, T.H.H. Pian, and S.J. Lasry. A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7 :297–308, 1973.
 - [49] N.I. Muskhelishvili. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. 1953. Noordhoff, Groningen, Holland.
 - [50] R. Piltner. Special finite elements with holes and internal cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21 :1471–1485, 1985.
 - [51] J. Zhang and N. Katsube. A polygonal element approach to random heterogeneous media with rigid ellipses or elliptical voids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148 :225–234, 1997.
 - [52] S. Ghosh and S.N. Mukhopadhyay. A two-dimensional automatic mesh generator for finite element analysis for random composites. *Computers & Structures*, 41 :245–256, 1991.
 - [53] J. Zhang and P. Dong. A hybrid polygonal element method for fracture mechanics analysis of resistance spot welds containing porosity. *Engineering Fracture Mechanics*, 59 :815–825, 1998.

- [54] D. Zeng, N. Katsube, and J. Zhang. A hybrid finite element method for fluid-filled porous materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 23 :1521–1534, 1999.
- [55] M. Dhanasekar, J. Han, and Q.H. Qin. A hybrid-Trefftz element containing an elliptic hole. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42 :1314–1323, 2006.
- [56] Q.H. Qin and X.Q. He. Special elliptic hole elements of Trefftz FEM in stress concentration analysis. *Journal of Mechanics and MEMS*, 1 :335–348, 2009.
- [57] H. Wang and Q.H. Qin. Fundamental-solution-based hybrid FEM for plane elasticity with special elements. *Computational Mechanics*, 48(5) :515–528, 2011.
- [58] H. Wang and Q.H. Qin. A new special element for stress concentration analysis of a plate with elliptical holes. *Acta Mechanica*, 223(6) :1323–1340, 2012.
- [59] Q.H. Qin and H. Wang. Special circular hole elements for thermal analysis in cellular solids with multiple circular holes. *International Journal of Computational Methods*, 10, 2013.
- [60] C.H. Yang and A.K. Soh. Modeling of voids/cracks and their interactions. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 38 :81–101, 2002.
- [61] A.K. Soh and Z.F. Long. A high precision element with a central circular hole. *International Journal of Solids and Structures*, 36 :5485–5497, 1999.
- [62] A.K. Soh and Z.F. Long. Development of two-dimensional elements with a central circular hole. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188 :431–440, 2000.
- [63] A.K. Soh and Z.F. Long. Reply to comments by R. Piltner on “A high precision element with a central circular hole” [Int. J. Solids Struct. 36 (1999) 5485-5497]. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :6267, 2001.
- [64] N. Leconte, B. Langrand, and E. Markiewicz. Toward a Hybrid-Trefftz element with a hole for elasto-plasticity? *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 218 :88–95, 2008.
- [65] S. Ghosh and S.N. Mukhopadhyay. A material based finite element analysis of heterogeneous media involving Dirichlet tessellations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 104 :211–247, 1993.
- [66] S. Ghosh and R.L. Mallett. Voronoi cell finite elements. *Computers & Structures*, 50 :33–46, 1994.
- [67] S. Ghosh. *Micromechanical analysis and multi-scale modeling using the Voronoi cell finite element method*. Computational Mechanics and Applied Analysis. CRC Press, 2011.
- [68] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society London A.*, 241 :376–396, 1957.
- [69] S. Ghosh and S. Moorthy. Elastic-plastic analysis of arbitrary heterogeneous materials with the Voronoi cell finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 121 :373–409, 1995.

- [70] S. Ghosh, K. Lee, and S. Moorthy. Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and Voronoi cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 32 :27–62, 1995.
- [71] S. Moorthy and S. Ghosh. A Voronoi cell finite element model for particle cracking in elastic-plastic composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151 :377–400, 1998.
- [72] S. Ghosh, Y. Ling, B. Majumdar, and R. Kim. Interfacial debonding analysis in multiple fiber reinforced composites. *Mechanics of Materials*, 32 :561–591, 2000.
- [73] S. Li and S. Ghosh. Modeling interfacial debonding and matrix cracking in fiber reinforced composites by the Extended Voronoi Cell FEM. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43 :397–410, 2007.
- [74] J. Zhang and N. Katsube. Problems related to application of transformation strains in a finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :3185–3193, 1994.
- [75] J. Zhang and N. Katsube. A hybrid finite element method for heterogeneous materials with randomly dispersed rigid inclusions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 :1635–1653, 1995.
- [76] J. Zhang and N. Katsube. A hybrid finite element method for heterogeneous materials with randomly dispersed elastic inclusions. *Finite Elements in Analysis and Design*, 19 :45–55, 1995.
- [77] L. Dong and S.N. Atluri. Development of T-Trefftz four-node quadrilateral and Voronoi cell finite elements for macro & micromechanical modeling of solids. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 81 :69–118, 2011.
- [78] L. Dong and S.N. Atluri. T-Trefftz Voronoi cell finite elements with elastic rigid inclusions or voids for micromechanical analysis of composite and porous materials. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 83 :183–219, 2012.
- [79] L. Dong and S.N. Atluri. A simple procedure to develop efficient & stable Hybrid/Mixed elements, and Voronoi cell finite elements for macro- & micromechanics. *Computers, Materials & Continua*, 24 :61–104, 2011.
- [80] L. Dong and S.N. Atluri. Development of 3D Trefftz Voronoi cells with ellipsoidal voids &/or elastic/rigid inclusions for micromechanical modeling of heterogeneous materials. *Computers, Materials & Continua*, 30 :39–81, 2012.
- [81] F. Cesari, F.M. Furguele, and D. Martini. Analisi di strutture piane in materiale eterogeneo con l’elemento finito ibrido. In *XXX AIAS*, pages 1093–1101, Alghero (Italy), 2001.
- [82] L. Bruno, F.M. Furguele, and C. Maletta. Thermo-mechanical analysis of elastic cracks in heterogeneous materials by FEM and VCFEM. In *Proceedings of the 11th International Conference on Fracture (ICF11)*, Turin, Italy, 2005.
- [83] L. Bruno, F.M. Furguele, and C. Maletta. A hybrid method for the thermo-mechanical analysis of elastic cracks in two-dimensional heterogeneous materials. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43 :444–452, 2007.

- [84] F. Cesari, F. Furguele, and C. Maletta. The determination of stress distribution and elastic properties for heterogeneous materials with hybrid finite element. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2 :1–13, 2005.
- [85] F. Cesari, F.M. Furguele, and D. Martini. An automatic mesh generator for random composites. In *12th International Conference on Design Tools and Methods in Industrial Design*, Rimini (Italy), 2001.
- [86] M.C. Chen and X.C. Ping. A novel hybrid finite element analysis of inplane singular elastic field around inclusion corners in elastic media. *International Journal of Solids and Structures*, 46 :2527–2538, 2009.
- [87] M.C. Chen, X.C. Ping, W.H. Liu, and Z. Xie. A novel hybrid finite element analysis of two polygonal holes in an infinite elastic plate. *Engineering Fracture Mechanics*, 83 :26–39, 2012.
- [88] T.D. Gerhardt. A Hybrid/Finite Element Approach for Stress Analysis of Notched Anisotropic Materials. *Journal of Applied Mechanics*, 51 :804–810, 1984.
- [89] X. Wang, Y. Zhou, and W. Zhou. A novel hybrid finite element with a hole for analysis of plane piezoelectric medium with defects. *International Journal of Solids and Structures*, 41 :7111–7128, 2004.
- [90] Q.Z. Xiao and B.L. Karihaloo. An overview of a hybrid crack element and determination of its complete displacement field. *Engineering Fracture Mechanics*, 74 :1107–1117, 2007.
- [91] N. Leconte, B. Langrand, and E. Markiewicz. Hybrid-displacement FE formulations including a hole. *Structural Engineering and Mechanics*, 31 :439–451, 2009.
- [92] N. Leconte and F. Di Paola. Établissement et analyse de solutions analytiques de plaque perforée. Rapport d’Avancement RA 5/12514 DADS, ONERA, Avril 2008.
- [93] R. Piltner. Some remarks on finite elements with an elliptic hole. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44 :767–772, 2008.
- [94] B. Langrand and N. Leconte. Formulation et implantation d’un élément fini hybride-Trefftz de plaque perforée pour le calcul de structure. Rapport Technique RT 1/17586 DADS, ONERA, Novembre 2010.
- [95] T.H.H. Pian and D. Chen. On the suppression of zero energy deformation modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19 :1741–1752, 1983.
- [96] Q.H. Qin. *The Trefftz Finite and Boundary Element Method*. 2000. WIT Press, Southampton.
- [97] M. Rezaiee-Pajand and M. Karkon. An effective membrane element based on analytical solution. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 39 :268–279, 2013.
- [98] M. Rothman. Isolated force problems in two-dimensional elasticity (I). *The quarterly journal of mechanics and applied mathematics*, 3 :279–296, 1950.
- [99] G.C. Sih. Stress distribution around an ovaloid hole under arbitrary concentrated forces. *Journal of Applied Sciences Research A*, 12 :378–390, 1964.

- [100] G. Kirsch. Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre. *Z VDI*, 42 :797–807, 1898.
- [101] R. Piltner. Comment on : “A hybrid-Trefftz element containing an elliptic hole”, by Manicka Dhanasekar, Jianjun Han and Qinghua Qin, *Finite Elements in Analysis and Design* 42 (2006) 1314-1323. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43 :975, 2007.
- [102] B. Langrand and E. Deletombe. A Model of Structural Embrittlement : from plastic location to failure – Theoretical basis and experimental characterisation on perforated plates. In *Proceedings of the 12th International Symposium on Plasticity (PLASTICITY 2006)*, Halifax, Nova Scotia, Canada, 2006.
- [103] R.E. Peterson. *Stress concentration factor – Charts and relations useful in making strength calculations for machine parts and structural elements*. A Willey Inter-science publication, 1974.
- [104] S. Cartel. *Méthodes numériques de représentation à variables séparées pour la résolution des problèmes paramétriques en mécanique non-linéaire des structures*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2011.
- [105] J.L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric turbulence and wave propagation*, Eds. A.M. Yaglom, V.I. Tatarski, pages 166–178, 1967. Moscow, Nauka.
- [106] G. Berkooz, P. Holmes, and J.L. Lumley. The Proper Orthogonal Decomposition in the analysis of turbulence flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25 :539–575, 1993.
- [107] I.T. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer, New York, 1986.
- [108] M. Bergmann. *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal. Application au sillage laminaire d’un cylindre circulaire*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004.
- [109] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part I : Coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45 :561–571, 1987.
- [110] G. Kerschen, J.C. Golinval, A.F. Vakakis, and L.A. Bergman. The method of Proper Orthogonal Decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems : An overview. *Nonlinear Dynamics*, 41 :147–169, 2005.
- [111] Z-SET/ZéBuLoN, *Non-linear finite element solver of the Z-SET suite*. 2011. <http://www.zset-software.com/> [Accessed on 1st September 2014].
- [112] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York, 1970.
- [113] E.F. Bruhn. *Analysis and design of flight vehicle structures*. Jacobs Publishing Inc., June 1973.
- [114] C. Hennuyer, N. Leconte, B. Langrand, and E. Markiewicz. Formulation of internal nodes in super-elements modelling stress concentrations – Application to a perforated plate. *Submitted to Finite Elements in Analysis and Design*, 2015.

-
- [115] R. Nottrot and R. Timman. A general method of solving the plane elasto-plastic problem. *Journal of Engineering Mathematics*, 1 :19–36, 1967.
- [116] M. Meyer Matiević. *La plaque trouée dans le domaine élastique-plastique*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Zurich, 1994.
- [117] S. Pommier and R. Hamam. Incremental model for fatigue crack growth based on a displacement partitioning hypothesis of mode I elastic-plastic displacement fields. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 30 :582–598, 2007.
- [118] S. Pommier. Propagation des fissures de fatigue. In *Cours IPSI (Institut pour la Promotion des Sciences de l’Ingénieur) - Propagation des fissures sous charges complexes*, Paris, France, 11-13 Septembre 2007.
- [119] F. Casadei, E. Gabellini, G. Fotia, F. Maggio, and A. Quarteroni. A mortar spectral/finite element method for complex 2D and 3D elastodynamic problems. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :5119–5148, 2002.
- [120] T. Menouillard, J. Réthoré, N. Moës, A. Combescure, and H. Bung. Mass lumping strategies for X-FEM explicit dynamics : Application to crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74 :447–474, 2008.
- [121] T. Elguedj, A. Gravouil, and H. Maigre. An explicit dynamics extended finite element method. Part 1 : Mass lumping for arbitrary enrichment functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 198 :2297–2317, 2009.
- [122] C. Hennuyer, N. Leconte, B. Langrand, and E. Markiewicz. Interpolation functions of a hybrid-Trefftz perforated super-element featuring nodes on the hole boundary. *Finite Elements in Analysis and Design*, 91 :40–47, 2014.
- [123] C. Hennuyer, N. Leconte, B. Langrand, and E. Markiewicz. Toward the modelling of riveted assemblies by super-finite elements in fast dynamic. *Mechanics & Industry*, 15(2) :133–137, 2014.
- [124] C. Hennuyer, N. Leconte, B. Langrand, and E. Markiewicz. Vers la modélisation des assemblages rivetés par super-éléments finis en dynamique rapide. In *11ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA2013)*, Giens, France, 13-17 Mai 2013.
- [125] C. Hennuyer, N. Leconte, B. Langrand, and E. Markiewicz. Vers la modélisation des assemblages rivetés par super-éléments finis en dynamique rapide. In *21ème Congrès Français de Mécanique (CFM2013)*, Bordeaux, France, 26-30 Août 2013.
- [126] C. Hennuyer, N. Leconte, B. Langrand, and E. Markiewicz. Super-éléments finis pour la modélisation des assemblages rivetés en calcul de structures. In *Séminaire NAFEMS Modélisation et Simulation des assemblages*, Paris, France, 30 Mai 2013.
- [127] C. Hennuyer, N. Leconte, B. Langrand, and E. Markiewicz. A hybrid-Trefftz perforated element featuring nodes on the hole boundary. In *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)*, Barcelone, Spain, 20-25 July 2014.
- [128] A. Quarteroni. *Méthodes numériques pour le calcul scientifique. Programmes en MATLAB*. Springer, 2000.

Annexe A

Liste des publications

Articles de revue publiés :

- C. Hennuyer, N. Leconte, B. Langrand, E. Markiewicz. *Toward the modelling of riveted assemblies by super-finite elements in fast dynamic*. Mechanics & Industry 15(2), 133-137, 2014 [122].
- C. Hennuyer, N. Leconte, B. Langrand, E. Markiewicz. *Interpolation functions of a hybrid-Trefftz perforated super-element featuring nodes on the hole boundary*. Finite Elements in Analysis and Design 91, 40-47, 2014 [123].

Article de revue soumis, en cours d'expertise :

- C. Hennuyer, N. Leconte, B. Langrand, E. Markiewicz. *Formulation of internal nodes in super-elements modelling stress concentrations - Application to a perforated plate*. Finite Elements in Analysis and Design, 2015 [114].

Communications nationales :

- 11ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA2013, Giens), 13-17 Mai 2013. *Vers la modélisation des assemblages rivetés par super-éléments finis en dynamique rapide* [124].
- 21ème Congrès Français de Mécanique (CFM2013, Bordeaux), 26-30 Août 2013. *Vers la modélisation des assemblages rivetés par super-éléments finis en dynamique rapide* [125].
- Séminaire NAFEMS Modélisation et Simulation des assemblages (Paris), 30 Mai 2013. *Super-éléments finis pour la modélisation des assemblages rivetés en calcul de structures* (invité) [126].

Communications internationales :

- 23ème Comité Technique Europlexus (€PX), 6 Décembre 2012, Ispra (Italie). *Modélisation par super-éléments finis de tôles perforées et rivetées soumises au choc*

et à l'impact : vers une implémentation dans Europlexus.

- 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI, Barcelone), 20-25 Juillet 2014. *A hybrid-Trefftz perforated element featuring nodes on the hole boundary* [127].

Annexe B

Modélisation des assemblages rivetés dans les calculs de structures – Un historique

Un historique des travaux de recherche effectués à l'Onera, depuis 1991 jusqu'à 2010, sur la modélisation des assemblages rivetés dans les calculs de structures aéronautiques complètes est résumé dans la Figure B.1.

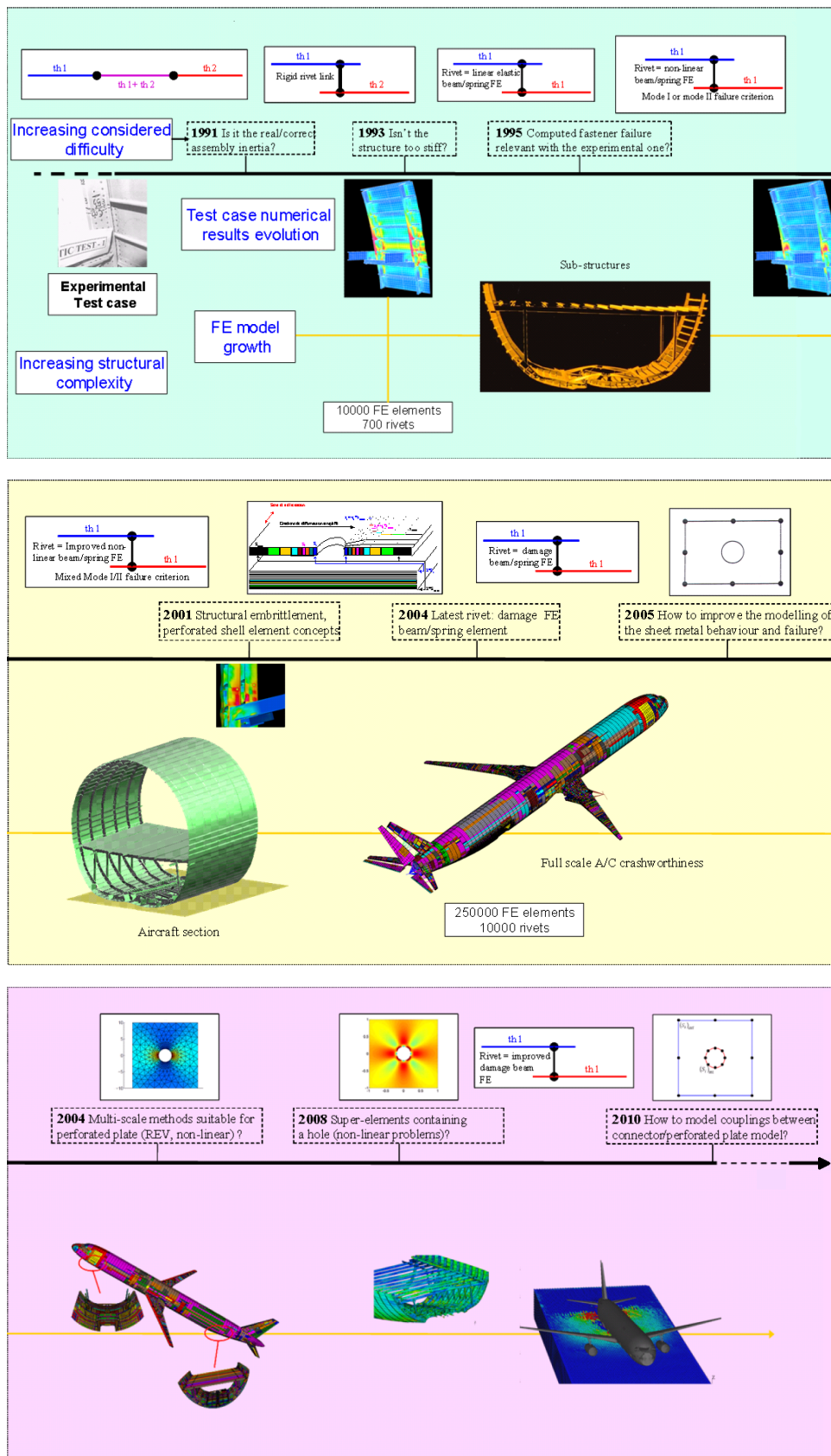


FIGURE B.1 – Historique des travaux de recherche sur la modélisation des assemblages rivetés en calculs de structures à l'Onera, depuis 1991 (haut) jusqu'en 2010 (bas).

Annexe C

Le logarithme complexe

Le logarithme complexe est la fonction notée \log définie sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, i.e. le plan complexe privé du demi-axe négatif, à valeurs dans \mathbb{C} comme :

$$\log(z) = \ln |z| + i \arg z \quad (\text{C.1})$$

où la fonction \ln est le logarithme népérien réel, $|z|$ est le module de z , et $\arg z$ est un argument du nombre complexe $z = re^{i\theta}$ défini par $\arg z = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

La fonction \log est une fonction *multi-valuée*, i.e. une fonction qui à chaque valeur de $z \in \Omega$ lui associe plusieurs valeurs (Figure C.1(c)). En l'occurrence, la fonction \log assigne une infinité de valeurs à chaque nombre complexe z puisque sa partie imaginaire est définie modulo 2π , sa partie réelle est quant à elle définie de manière unique.

La *branche principale*, ou *détermination principale*, de la fonction multi-valuée \log est définie par :

$$\text{Log}(z) = \ln |z| + i \text{Arg} z \quad (\text{C.2})$$

où $\text{Log}(z)$ est la détermination principale de $\log z$, et $\text{Arg} z$ est l'argument principal, i.e. l'unique valeur de $\arg z$ dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$. Les parties réelle et imaginaire de la fonction $\text{Log}(z)$ sont illustrées dans les Figures C.1(a) et C.1(b), respectivement.

Notons que la fonction $\text{Log}(z)$ coïncide avec le logarithme népérien réel sur \mathbb{R}^* .

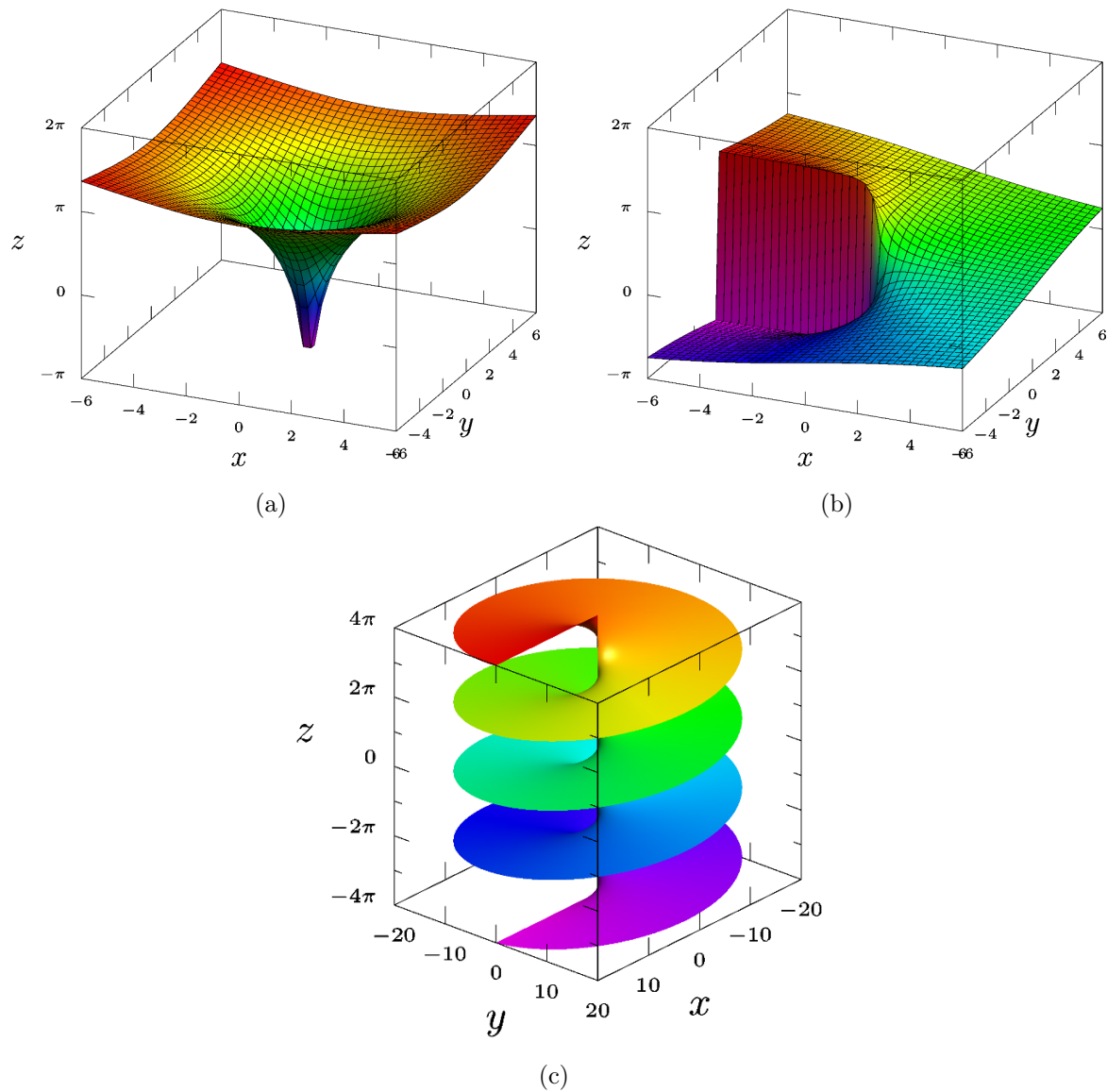


FIGURE C.1 – Représentation graphique du logarithme complexe. (a) Partie réelle de $\text{Log}(z)$, (b) Partie imaginaire de $\text{Log}(z)$, (c) Surface de Riemann associée au logarithme complexe.

Annexe D

Influence de la distance de prélèvement

L'évaluation des fonctions d'interpolation calculées à l'ordre $N = M = 4$, faite par Leconte *et al.* [10], a montré que la distance à laquelle sont extraits les déplacements dans la plaque n'a pas d'influence sur la reconstruction des champs.

Les résultats présentés ici montrent qu'il en est de même lorsque les fonctions d'interpolation sont tronquées à l'ordre 8. Par exemple, les résultats obtenus pour une configuration de prélèvement avec 8 points sur le carré et 8 points sur la perforation (Figure 3.1(c)), i.e. pour une configuration $\{8/8/8\}$, dans le cas de la solution de référence analytique de Kirsch (Équation (3.3.1)), sont similaires quelle que soit la valeur du ratio L/r_0 (Figure D.1).

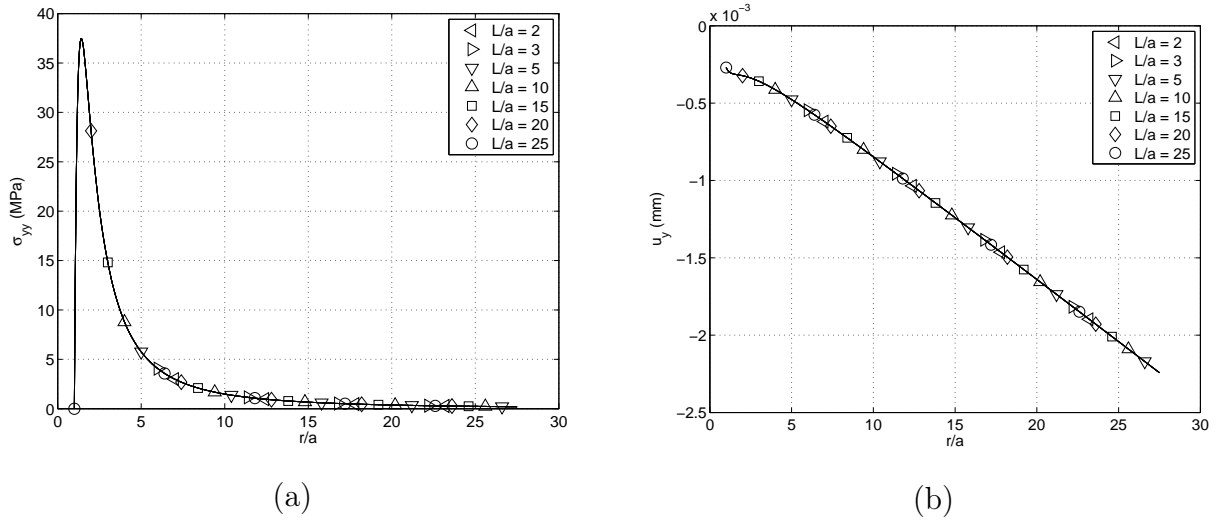


FIGURE D.1 – Comparaison des résultats obtenus avec la configuration $\{8/8/8\}$ le long de l'axe $\{x = 0\}$ pour différentes valeurs du ratio L/r_0 . (a) σ_{yy} , (b) u_y .

Annexe E

Expressions analytiques des champs de contraintes et de déplacements

L'analyse présentée dans la Section 3.3.1 ainsi que de précédents travaux sur l'étude de la solution analytique de Kolosov-Muskhelishvili [94] ont montrés que certains cas de chargement étaient complètement pilotés par uniquement quelques paramètres (α_j, β_j) .

Les paramètres significatifs identifiés dans le cas d'une traction uniaxiale, d'une traction biaxiale, d'un cisaillement pur et d'un cisaillement simple sont, respectivement, (α_{-1}, α_1) , α_1 , (β_{-1}, β_1) , et β_1 ; les autres paramètres étant négligeables. Par conséquent, la solution analytique d'une plaque perforée soumise à l'un des chargements cités et dont la perforation, libre de chargement, est circulaire de rayon r_0 peut se réduire à la seule contribution des paramètres significatifs.

E.1 Traction uniaxiale

$$\begin{aligned} u_x^h(R, \theta) = & \frac{1}{2\mu} \alpha_{-1} \left[\left(\frac{k}{R} + R \right) \cos \theta + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^3} \right) \cos 3\theta \right] \\ & + \frac{1}{2\mu} \alpha_1 \left[(k-1)R + \frac{2}{R} \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{E.1.1})$$

$$\begin{aligned} u_y^h(R, \theta) = & \frac{1}{2\mu} \alpha_{-1} \left[- \left(\frac{k}{R} + R \right) \sin \theta + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^3} \right) \sin 3\theta \right] \\ & + \frac{1}{2\mu} \alpha_1 \left[\left((k-1)R + \frac{2}{R} \right) \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (\text{E.1.2})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^h(R, \theta) = & \frac{1}{r_0} \alpha_{-1} \left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{3}{R^2} - 2 \right) \cos 4\theta - \frac{2}{R^2} \cos 2\theta + 1 \right] \\ & + \frac{2}{r_0} \alpha_1 \left[1 - \frac{1}{R^2} \cos 2\theta \right] \end{aligned} \quad (\text{E.1.3})$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^h(R, \theta) = & \frac{1}{r_0}\alpha_{-1} \left[\frac{1}{R^2} \left(2 - \frac{3}{R^2} \right) \cos 4\theta - \frac{2}{R^2} \cos 2\theta - 1 \right] \\ & + \frac{2}{r_0}\alpha_1 \left[1 + \frac{1}{R^2} \cos 2\theta \right]\end{aligned}\quad (\text{E.1.4})$$

$$\sigma_{xy}^h(R, \theta) = \frac{1}{r_0 R^2} \alpha_{-1} \left(\frac{3}{R^2} - 2 \right) \sin 4\theta - \frac{2}{r_0 R^2} \alpha_1 \sin 2\theta \quad (\text{E.1.5})$$

E.2 Traction biaxiale

$$u_x^h(R, \theta) = \frac{1}{2\mu} \alpha_1 \left[\left((k-1)R + \frac{2}{R} \right) \cos \theta \right] \quad (\text{E.2.1})$$

$$u_y^h(R, \theta) = \frac{1}{2\mu} \alpha_1 \left[\left((k-1)R + \frac{2}{R} \right) \sin \theta \right] \quad (\text{E.2.2})$$

$$\sigma_{xx}^h(R, \theta) = \frac{2}{r_0} \alpha_1 \left[1 - \frac{1}{R^2} \cos 2\theta \right] \quad (\text{E.2.3})$$

$$\sigma_{yy}^h(R, \theta) = \frac{2}{r_0} \alpha_1 \left[1 + \frac{1}{R^2} \cos 2\theta \right] \quad (\text{E.2.4})$$

$$\sigma_{xy}^h(R, \theta) = -\frac{2}{r_0 R^2} \alpha_1 \sin 2\theta \quad (\text{E.2.5})$$

E.3 Cisaillement simple

$$\begin{aligned}u_x^h(R, \theta) = & \frac{1}{2\mu} \beta_{-1} \left[\left(\frac{k}{R} + R \right) \sin \theta + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^3} \right) \sin 3\theta \right] \\ & + \frac{1}{2\mu} \beta_1 \left[-(k+1)R \sin \theta \right]\end{aligned}\quad (\text{E.3.1})$$

$$\begin{aligned}u_y^h(R, \theta) = & \frac{1}{2\mu} \beta_{-1} \left[\left(\frac{k}{R} + R \right) \cos \theta - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^3} \right) \cos 3\theta \right] \\ & + \frac{1}{2\mu} \beta_1 \left[(k+1)R \cos \theta \right]\end{aligned}\quad (\text{E.3.2})$$

$$\sigma_{xx}^h(R, \theta) = \frac{1}{r_0 R^2} \beta_{-1} \left[\left(\frac{3}{R^2} - 2 \right) \sin 4\theta - 2 \sin 2\theta \right] \quad (\text{E.3.3})$$

$$\sigma_{yy}^h(R, \theta) = -\frac{1}{r_0 R^2} \beta_{-1} \left[\left(\frac{3}{R^2} - 2 \right) \sin 4\theta + 2 \sin 2\theta \right] \quad (\text{E.3.4})$$

$$\sigma_{xy}^h(R, \theta) = -\frac{1}{r_0} \beta_{-1} \left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{3}{R^2} - 2 \right) \cos 4\theta - 1 \right] \quad (\text{E.3.5})$$

E.4 Cisaillement pur

$$u_x^h(R, \theta) = \frac{1}{2\mu} \beta_{-1} \left[\left(\frac{k}{R} + R \right) \sin \theta + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^3} \right) \sin 3\theta \right] \quad (\text{E.4.1})$$

$$u_y^h(R, \theta) = \frac{1}{2\mu} \beta_{-1} \left[\left(\frac{k}{R} + R \right) \cos \theta - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^3} \right) \cos 3\theta \right] \quad (\text{E.4.2})$$

$$\sigma_{xx}^h(R, \theta) = \frac{1}{r_0 R^2} \beta_{-1} \left[\left(\frac{3}{R^2} - 2 \right) \sin 4\theta - 2 \sin 2\theta \right] \quad (\text{E.4.3})$$

$$\sigma_{yy}^h(R, \theta) = -\frac{1}{r_0 R^2} \beta_{-1} \left[\left(\frac{3}{R^2} - 2 \right) \sin 4\theta + 2 \sin 2\theta \right] \quad (\text{E.4.4})$$

$$\sigma_{xy}^h(R, \theta) = -\frac{1}{r_0} \beta_{-1} \left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{3}{R^2} - 2 \right) \cos 4\theta - 1 \right] \quad (\text{E.4.5})$$

Annexe F

Préconditionnement

Soit $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, un système linéaire avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice inversible et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Supposons que la matrice \mathbf{A} soit mal conditionnée, i.e. $\kappa(\mathbf{A}) \gg 1$. Une technique numérique appelée le *préconditionnement*, peut être alors appliquée dans le but de diminuer le conditionnement du système. Autrement dit, il s'agit de diminuer la sensibilité de la solution par rapport à d'éventuelles perturbations introduites soit dans la matrice \mathbf{A} , soit dans le vecteur second membre \mathbf{b} .

Cette technique consiste à résoudre un système équivalent au système linéaire initial, appelé le *système préconditionné*. Ce système est décrit par l'Équation (F.1).

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{F.1})$$

où $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice inversible, appelée la *matrice de préconditionnement*, telle que le conditionnement de la matrice $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$ soit sensiblement inférieur à celui de la matrice \mathbf{A} , i.e. $\kappa(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}) \ll \kappa(\mathbf{A})$.

Le système préconditionné de l'Équation (F.1) correspond à un préconditionnement à gauche. De façon similaire, un préconditionnement à droite et un préconditionnement centré peuvent également être définis [128]. Cette technique de préconditionnement est surtout utilisée pour améliorer la vitesse de convergence (i.e., diminution du nombre d'itérations) des méthodes de résolution itératives, telles que la méthode du Gradient Conjugué par exemple. Cependant, la recherche de la matrice \mathbf{C} , i.e. d'un « bon préconditionneur », est souvent difficile. Parmi les préconditionneurs classiquement utilisés, on trouve les suivants :

— le préconditionneur diagonal, dit de Jacobi :

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} \quad (\text{F.2})$$

— le préconditionneur de Gauss-Seidel :

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} - \mathbf{E} \quad (\text{F.3})$$

— le préconditionneur SOR (Successive Over-Relaxation) :

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} - \omega\mathbf{E}, \text{ avec } 0 < \omega < 2 \text{ le paramètre de relaxation} \quad (\text{F.4})$$

— le préconditionneur SSOR (Symmetric SOR) :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2 - \omega} (\mathbf{D} - \omega \mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} - \omega \mathbf{F}) \quad (\text{F.5})$$

où la matrice \mathbf{A} est décomposée comme suit $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$, avec \mathbf{D} la diagonale de \mathbf{A} , \mathbf{E} la matrice triangulaire inférieure stricte de \mathbf{A} , et \mathbf{F} la matrice triangulaire supérieure stricte de \mathbf{A} .

Annexe G

Exemple de fichier .inp

```
****calcul mechanical

***hybrid_trefftz
**elset D1                                % Ensemble des éléments de type
                                           % hybrid_trefftz
*rho 0.2                                % Rayon de la perforation
*k_mat 2.0769                           % Constante de Muskhelishvili
*mu 28461.5                             % Module de cisaillement de la plaque
*ngp 4                                  % Nombre de points de Gauss par
                                           % segment (frontières externe et interne)

***mesh
**file CL_part_sym_HT_INT.geof          % Fichier .geof contenant le maillage
                                           % avec le super-élément
**elset D0 plane_stress                  % Ensemble des EFs conventionnels

***resolution
**sequence
*time 1.
*increment 5
*iteration 5
*ratio 1.e12

***bc
**impose_nodal_dof
  axe_sym_y U1 0.0
  axe_sym_x U2 0.0
**impose_trefftz_pressure_reaction      % CL pression constante appliquée à la
                                           % perforation du super-élément
*element_id 25                          % Numéro de l'élément hybrid_trefftz
*P 100.                                  % Valeur de la pression appliquée sur
                                           % le trou

*table time
```

```
***material
  *file mat_elast           % Fichier contenant les caractéristiques
                             % matériau de la plaque perforée

****return
```

Annexe H

Distribution du champ de déplacements obtenue avec le nouveau super-élément

H.1 Résultats obtenus avec 4 points de Gauss

La distribution de la composante u_x du champ de déplacements calculée avec le maillage EF fin (Figure 3.7) pour les 4 cas de chargement étudiés est montrée dans la Figure H.1.

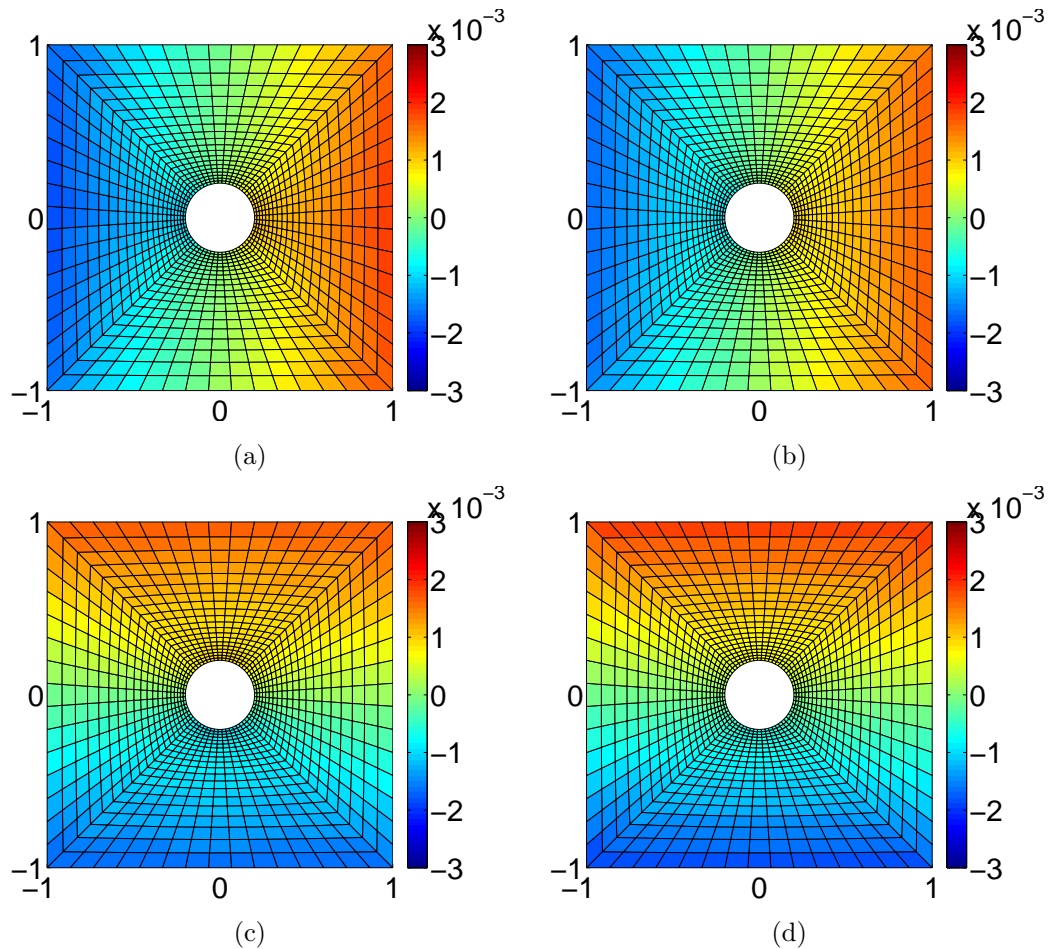


FIGURE H.1 – Distribution de la composante u_x du déplacement obtenue à partir du maillage fin standard. (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.

La distribution de u_x obtenue avec le super-élément perforé à 16 nœuds et 4 points de Gauss par segment, pour les 4 cas de chargement est montrée dans la Figure H.2.

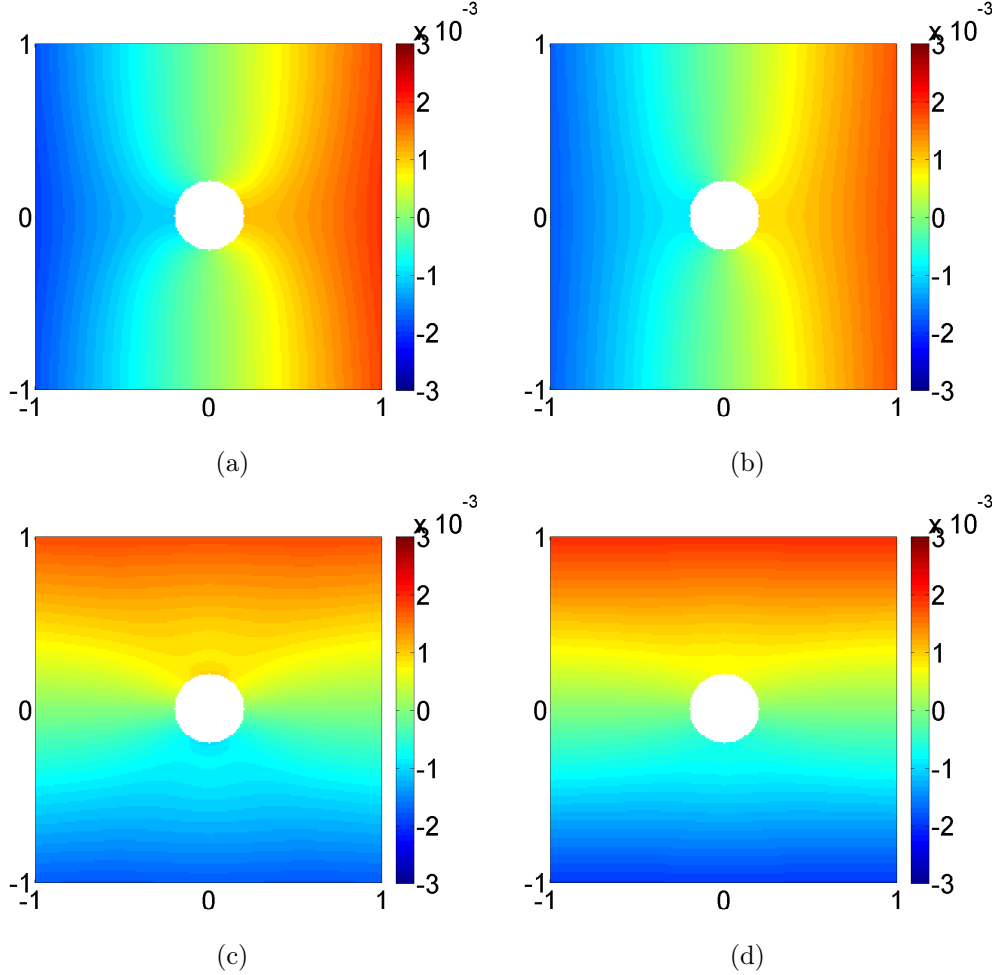


FIGURE H.2 – Distribution de la composante u_x du déplacement obtenue avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation. (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.

Les résultats obtenus avec le super-élément à 16 nœuds sont précis, comme le montre la Figure H.3 où ces résultats sont comparés à ceux obtenus avec le modèle EF fin et le super-élément perforé à 8 nœuds sur certains axes particuliers du domaine perforé. L'erreur relative obtenue avec les deux super-éléments (8 et 16 nœuds) par rapport aux résultats du modèle EF fin, le long de ces axes particuliers, est illustrée dans la Figure H.4.

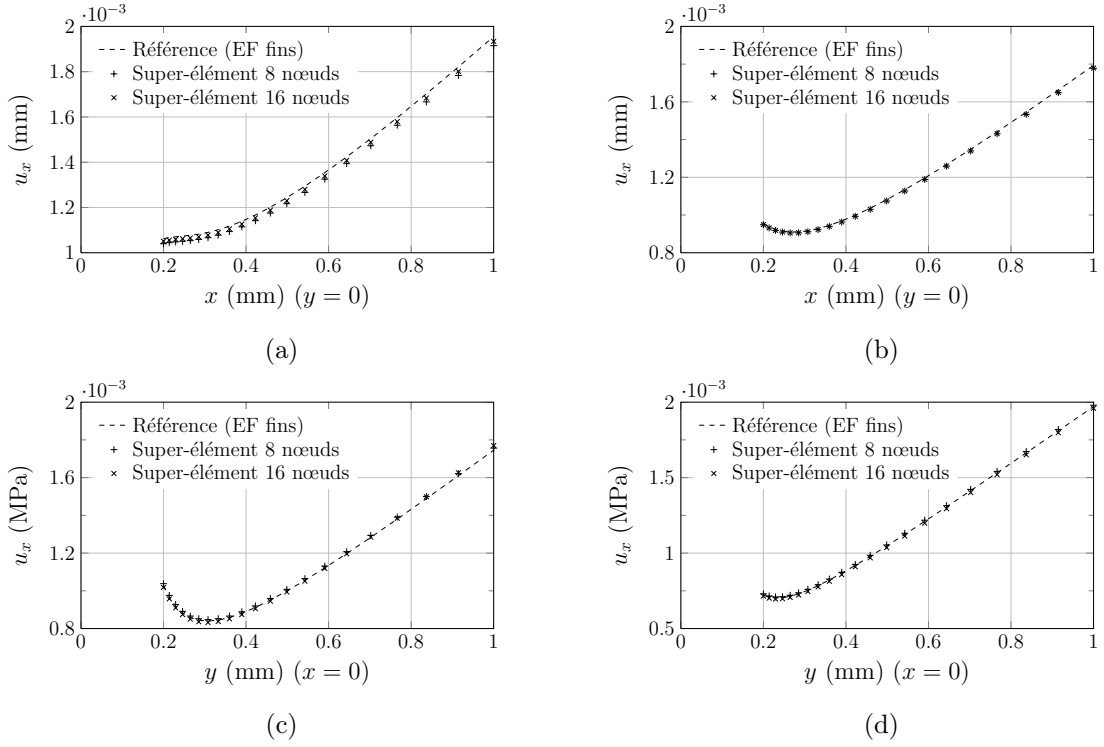


FIGURE H.3 – Distribution de la composante u_x du déplacement obtenue avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation. Comparaison avec le super-élément à 8 nœuds et la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = 0\}$.

H.2 Évaluation de l'influence du nombre de points de Gauss

L'influence du nombre de points de Gauss, utilisé pour l'intégration de la matrice de rigidité du nouveau super-élément, sur la distribution du déplacement u_x est évaluée dans cette section. Les résultats obtenus avec une règle d'intégration à 4, 16, ou 32 points de Gauss sont comparés dans les Figures H.5 et H.6. Les résultats sont similaires quel que soit le nombre de points de Gauss utilisé (4, 16 ou 32) ou le cas de chargement. Les graphes d'erreur (Figure H.6) montrent toutefois des résultats légèrement meilleurs avec 4 points de Gauss qu'avec 16 ou 32 points. Ces deux derniers montrent, d'ailleurs, des résultats quasiment identiques. Notons que la conclusion est la même pour le déplacement u_y .

H.3 Réinterpolation avec 32 paramètres

La distribution du déplacement u_x obtenue avec le super-élément perforé à 16 nœuds et une réinterpolation avec 32 paramètres, au lieu de 16 comme c'était le cas dans les

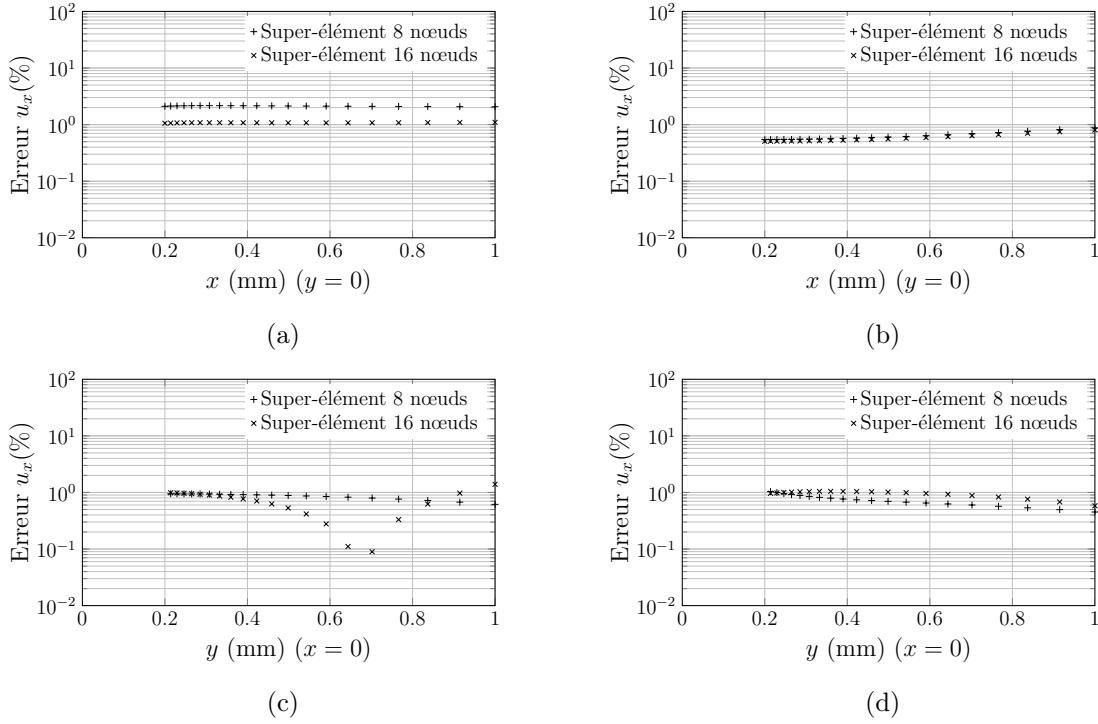


FIGURE H.4 – Erreur relative (%) sur le déplacement u_x obtenu avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation, et avec le super-élément à 8 nœuds, par rapport à la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = 0\}$.

résultats présentés précédemment, est présentée dans la Figure H.7. Les résultats sont comparés, le long de certains axes particuliers, avec les résultats de référence (EF fins) et avec ceux obtenus avec une réinterpolation à 16 paramètres (Figure H.8).

Le déplacement u_x est correctement reconstruit pour tous les cas de chargement sauf pour le cas du cisaillement simple. Notons que les résultats en termes de déplacement sont précis dans tout le domaine perforé dans le cas du cisaillement pur (Figures H.7(c) et H.8(c)), contrairement à ce qui est observé pour les contraintes. Les deux paramètres β_{-5} et β_7 , identifiés comme étant responsables des biais introduits dans les contraintes pour ce cas de chargement, n'ont donc pas d'influence sur les déplacements. Concernant les résultats obtenus dans le cas du cisaillement simple, des écarts importants sont observés. Ceux-ci ne sont pas uniquement observés au voisinage de la frontière externe du super-élément, comme ce qui est observé pour le champ des contraintes (Section 4.3.1.3), mais également à proximité de la perforation (Figures H.7(d) et H.8(d)). Remarquons que le fait de fixer β_{-7} et β_5 à zéro n'a aucune influence sur la précision de u_x (Figure H.8(d)), alors que les résultats en termes de contraintes sont améliorés dans ce cas (Figure 4.14(d)).

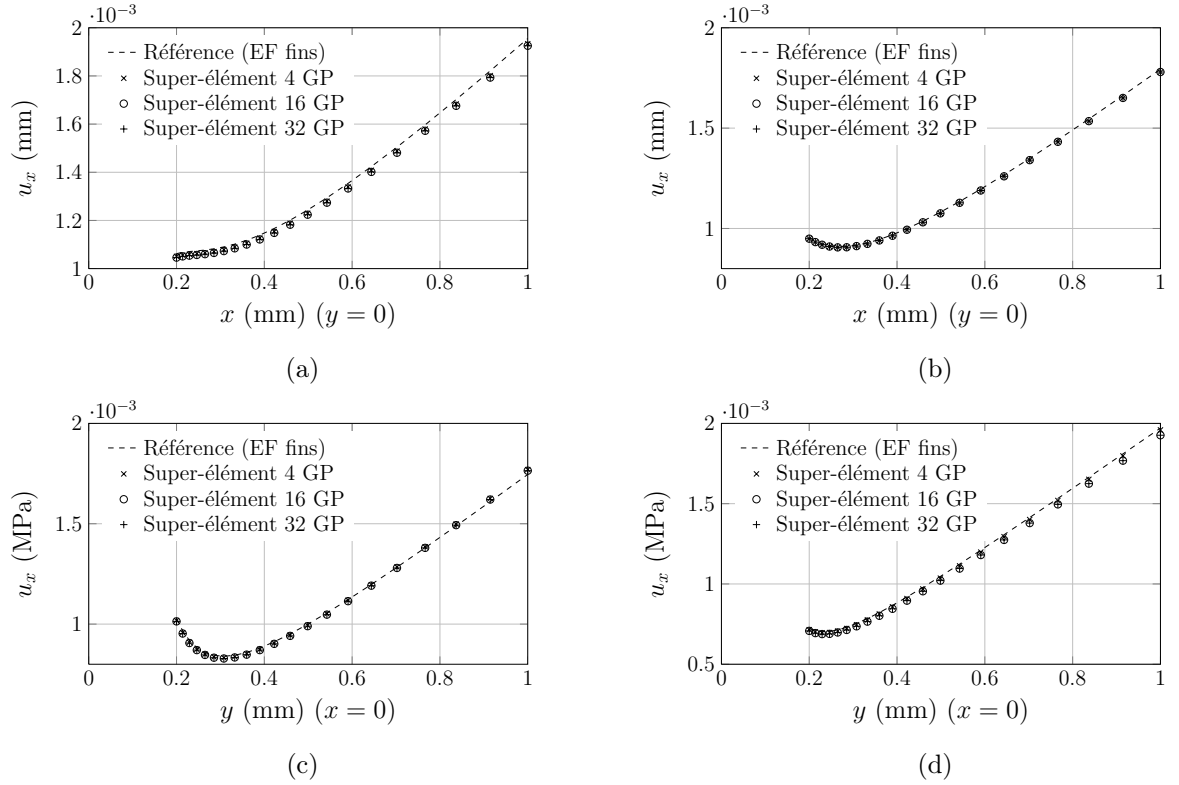


FIGURE H.5 – Distribution du déplacement u_x obtenue avec le super-élément à 16 nœuds pour 4, 16, et 32 points de Gauss par côté, et comparaison avec les résultats de référence. (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = 0\}$.

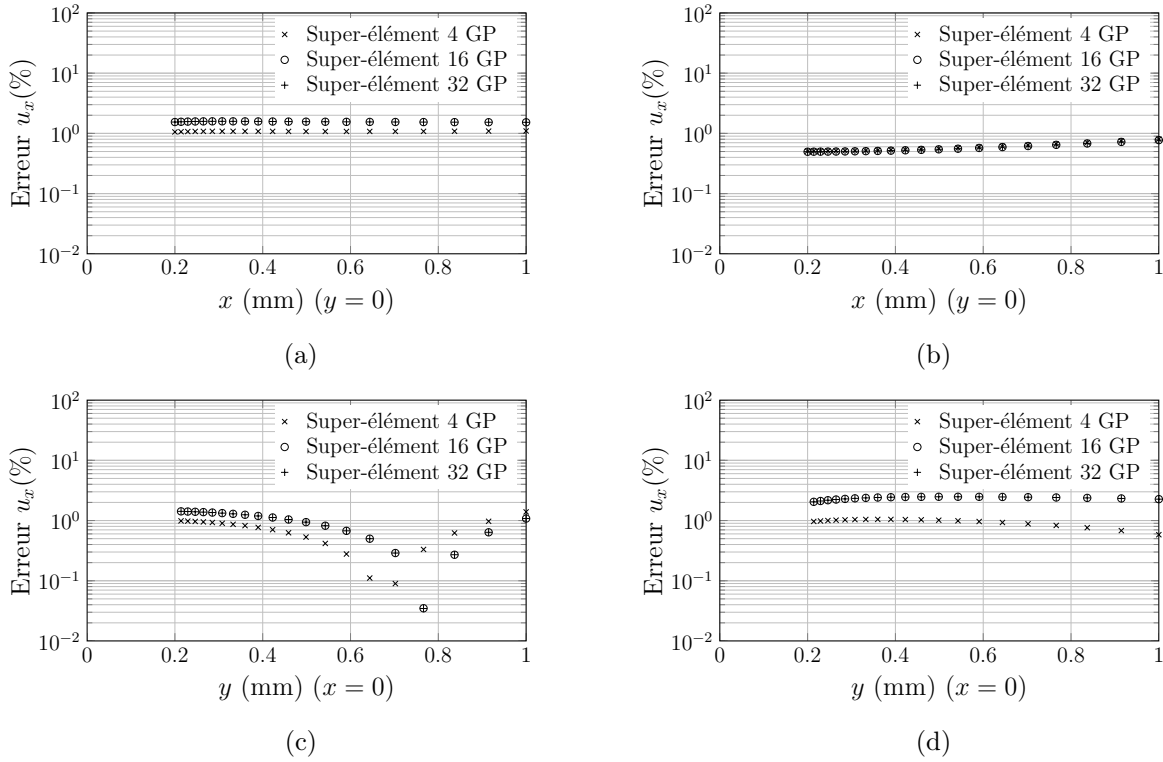


FIGURE H.6 – Erreur relative (%) sur le déplacement u_x calculée en fonction du nombre de points de Gauss par rapport à la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = 0\}$.

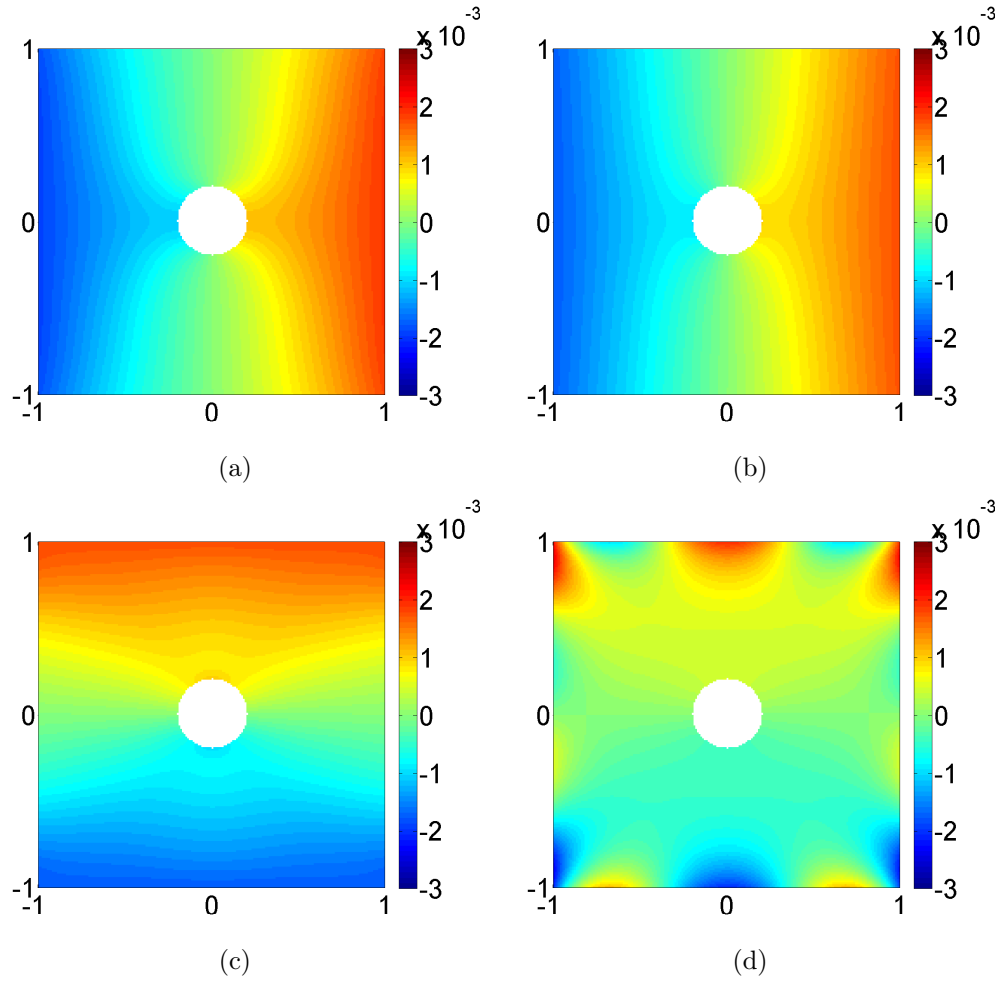
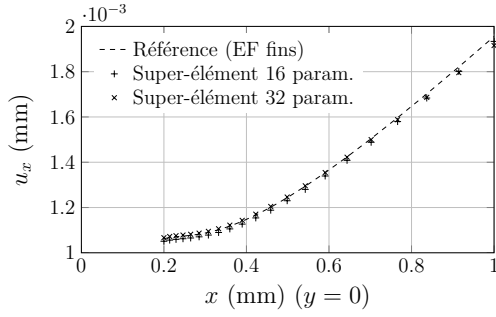
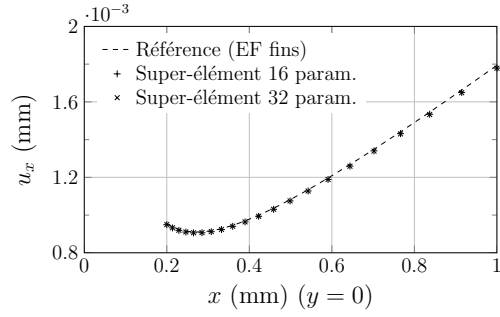


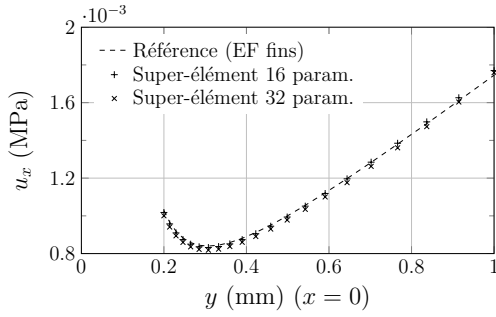
FIGURE H.7 – Distribution de la composante u_x du déplacement obtenue avec le super-élément à 16 nœuds et une réinterpolation à 32 paramètres. (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.



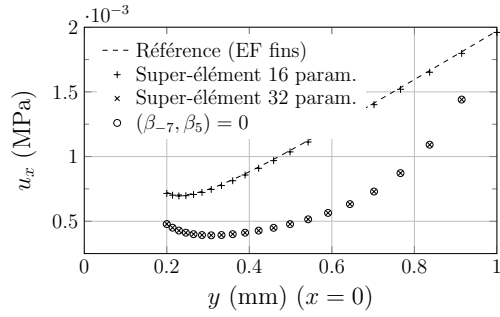
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE H.8 – Comparaison de la distribution de la composante u_x du déplacement obtenue avec le super-élément à 16 nœuds réinterpolé avec 16 ou 32 paramètres. (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = 0\}$.

Annexe I

Déplacements nodaux u_y obtenus avec le nouveau super-élément lorsque la perforation est soumise à une pression

Le déplacement u_y des nœuds externes et internes du super-élément à 16 nœuds, dont la perforation est soumise à une pression constante et uniforme de valeur $P = 100$ MPa, est présenté dans les Figures I.1 et I.2, respectivement.

Une erreur systématique, sous la forme d'un coefficient multiplicateur, sur la valeur du déplacement u_y des nœuds externes et internes du super-élément est observée. L'erreur par rapport aux valeurs nodales analytiques, lorsque ces coefficients sont appliqués, est inférieure à 3% (Figures I.3 et I.4).

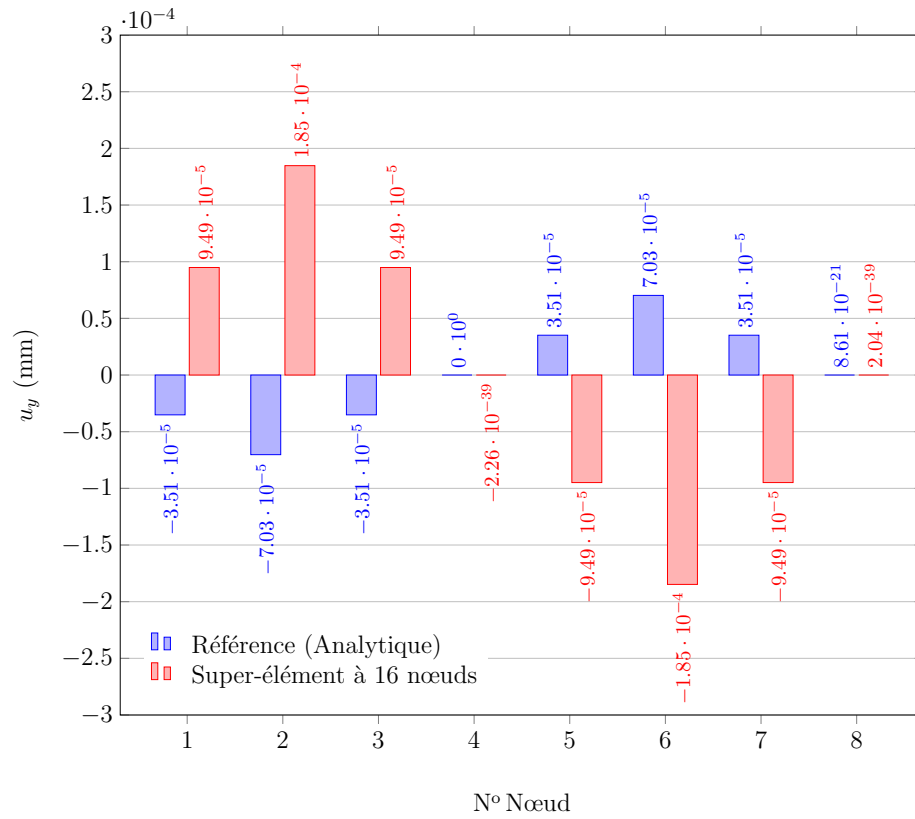


FIGURE I.1 – Déplacement u_y des nœuds externes.

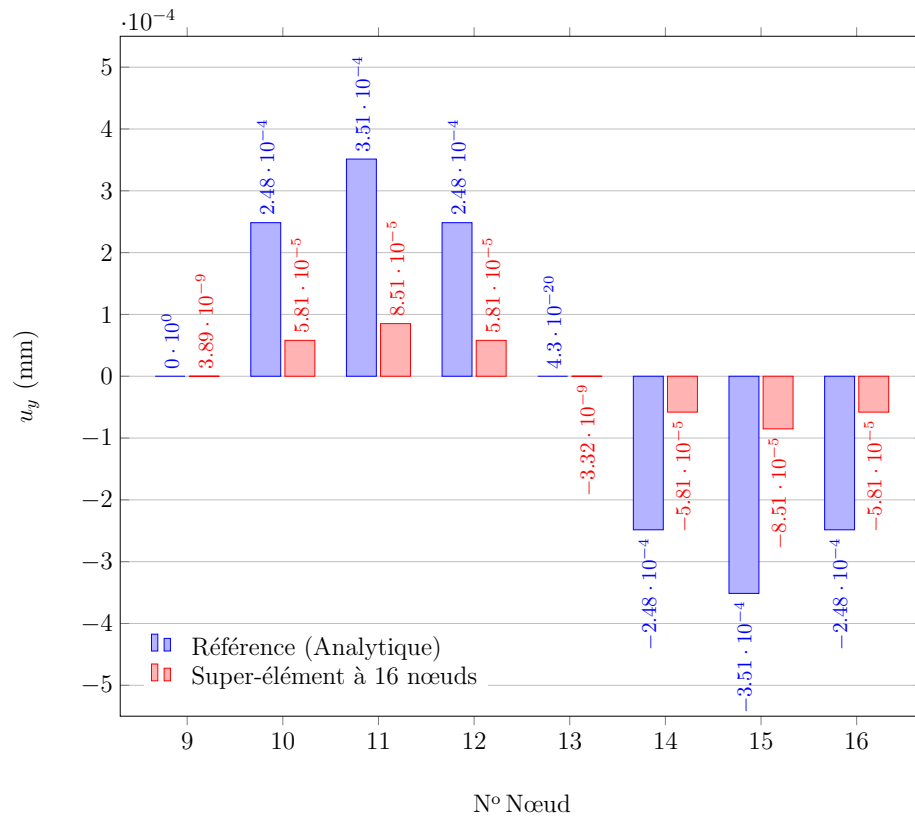


FIGURE I.2 – Déplacement u_y des nœuds internes.

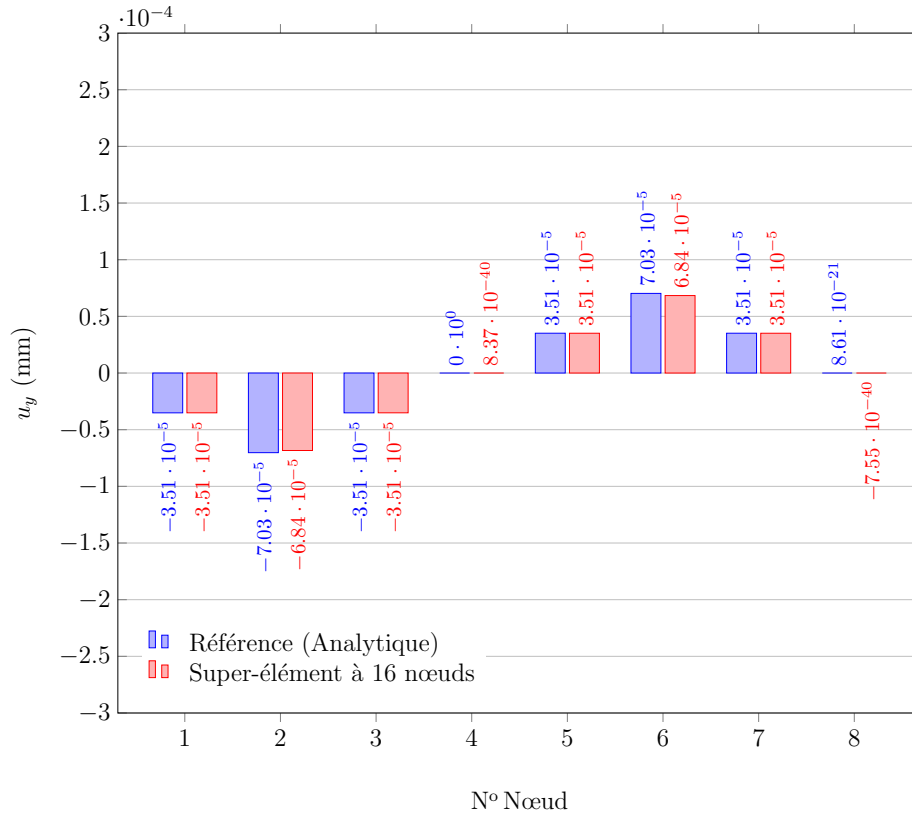


FIGURE I.3 – Déplacement u_y des nœuds externes multiplié par le coefficient -0.37 .

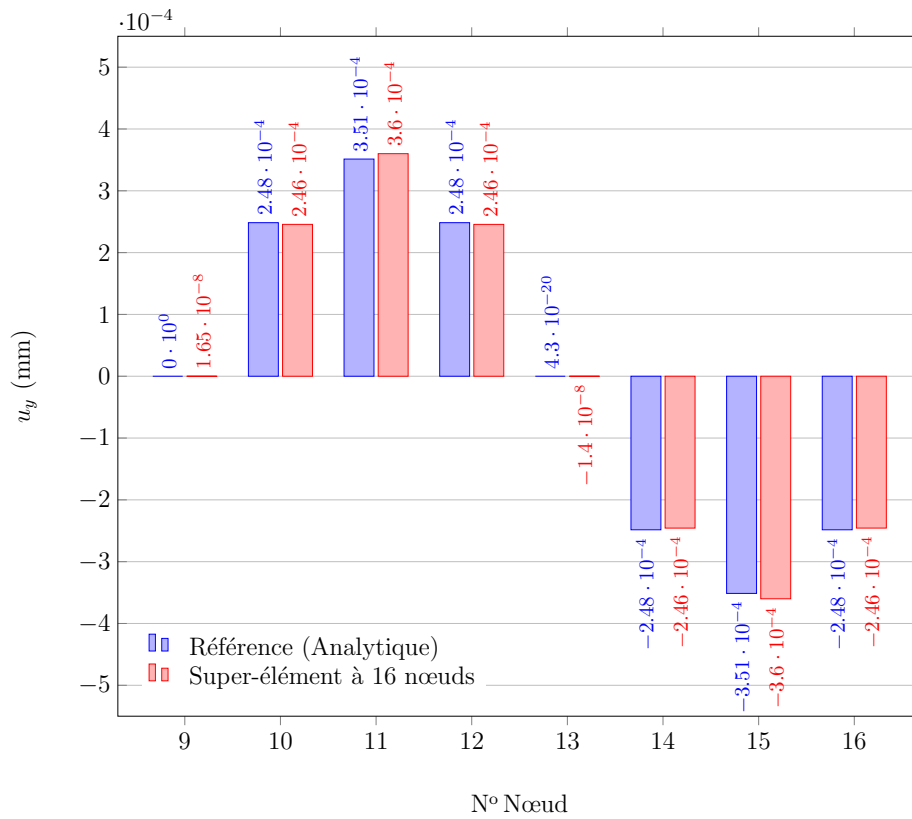




FIGURE I.4 – Déplacement u_y des nœuds internes multiplié par le coefficient 4.23 .

Table des figures

1	Évacuation des passagers de l'A320 sur l'Hudson.	2
2	Accident du Boeing 737 du vol 243 d'Aloha Airlines.	3
3	Propagation de fissures (a) Dans une plaque métallique rivetée après un impact oiseau [1], (b) Dans une plaque multi-perforée soumise à un chargement d'explosion [2].	3
4	(a) Localisation des contraintes observée sur une éprouvette perforée, (b) Mode de déformation d'un assemblage riveté, (c) Modélisation fine d'un assemblage riveté.	4
5	Modèle d'avion complet (A321).	5
1.1	Domaine Ω et sa frontière Γ associé au problème à résoudre [11].	10
1.2	(a) Représentation d'une fissure dans un maillage uniforme avec X-FEM. Les nœuds enrichis pour la modélisation de la discontinuité sont symbolisés par \circ , et les nœuds enrichis pour la modélisation des fonds de fissure sont symbolisés par \square , (b) Représentation des level-sets Ψ et ϕ [12].	14
1.3	Principe de l'homogénéisation [20].	15
1.4	(a) Représentation d'une perforation dans un maillage uniforme avec X-FEM. Les nœuds enrichis pour la modélisation de la discontinuité sont symbolisés par \circ , et les nœuds éliminés sont symbolisés par \diamond , (b) Représentation de la level-set ϕ dans le cas d'un trou [12].	17
1.5	Volume Élémentaire Représentatif [20].	17
1.6	Décomposition du domaine Ω : méthode avec recouvrement [23].	20

1.7	Méthode Arlequin (a) Zone de recouvrement S , (b) Zone de collage S_g [23].	21
1.8	Décomposition du domaine Ω : méthode sans recouvrement [23].	22
1.9	Connexion de deux sous-domaines le long d'une interface par multiplicateurs de Lagrange [11].	24
1.10	(a) Maillage sans interface Mortar (compatibilité), (b) Maillage avec interface Mortar (incompatibilité) [11].	26
1.11	Interface de déplacements indépendante (a) Entre deux sous-domaines, (b) Entourant un sous-domaine [11].	28
1.12	Classification des principes variationnels [37].	29
1.13	Relations entre les principes variationnels de type hybride déplacement [46].	31
1.14	Principes variationnels et niveaux de contrainte [9].	31
1.15	Points source pour le calcul des fonctions d'interpolation [57].	34
1.16	Description de la résolution du problème de la formulation d'un super-élément polygonal à inclusion polygonale [81].	39
1.17	(a) Super-élément perforé à 8 nœuds, (b) Super-élément perforé à 16 nœuds.	47
1.18	Pression constante appliquée sur une partie du contour de la perforation : transformation d'une ellipse en un cercle unité [49].	48
1.19	Maillage EF contenant le super-élément perforé à 8 nœuds au centre. . . .	50
1.20	(a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises le long de l'axe $\{x = 0\}$ obtenue avec le super-élément à 8 nœuds pour 2, 4 et 8 points de Gauss par côté, et comparaison avec les résultats de référence (maillage EF fin), (b) Distribution de la contrainte équivalente de Von Mises obtenue avec le super-élément perforé à 8 nœuds pour 4 points de Gauss par côté [10].	51
2.1	Nature des frontières du super-élément perforé avec nœuds internes. . . .	59
2.2	Super-élément perforé à 16 nœuds avec 8 nœuds sur la perforation. . . .	61
2.3	Schéma d'une force concentrée $F = F_{X_r} + iF_{Y_r}$ appliquée au point $z = z_r$ du contour de la perforation.	63

3.1	Configuration des points de prélèvement pour le calcul de la solution de K-M. Les points de prélèvement sont représentés par le symbole \blacklozenge . (a) 8 points sur le carré, (b) 16 points sur le carré, (c) 8 points sur le carré et 8 points sur la perforation.	78
3.2	Post-traitement des résultats : les lignes particulières où les déplacements et les contraintes sont comparés sont notées de 1 à 4	79
3.3	Comparaison entre la solution analytique de référence de Kirsch et la solution de K-M pour la configuration {8/8/8}. (a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = 0\}$, (c) u_x le long de l'axe $\{y = 0\}$, (d) σ_{yy} le long de la perforation.	83
3.4	Comparaison entre la solution analytique de référence générée et la solution de K-M pour la configuration {8/8/8} pour le cas de la traction biaxiale. (a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = 0\}$, (c) u_x le long de l'axe $\{y = 0\}$, (d) σ_{yy} le long de la perforation.	85
3.5	Comparaison entre la solution analytique de référence générée et la solution de K-M pour la configuration {8/8/8} pour le cas du cisaillement simple. (a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = 0\}$, (c) u_y le long de l'axe $\{y = 0\}$, (d) σ_{xy} le long de la perforation.	86
3.6	Comparaison entre la solution analytique de référence générée et la solution de K-M pour la configuration {8/8/8} pour le cas du cisaillement pur. (a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = y\}$, (c) u_x le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) σ_{xy} le long de la perforation.	87
3.7	Maillage EF standard utilisé pour la construction des résultats de référence numériques et zoom sur la partie centrale.	90
3.8	Comparaison entre la solution numérique de référence et la solution de K-M pour la configuration {16/0/8} pour le cas de la traction biaxiale. (a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = y\}$, (c) u_x le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) σ_y le long de la perforation.	92

3.9	Comparaison entre la solution numérique de référence et la solution de K-M pour la configuration $\{8/8/8\}$ pour le cas du cisaillement pur. (a) Distribution de la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = y\}$, (c) u_x le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) σ_{xy} le long de la perforation.	93
3.10	Comparaison entre la solution numérique de référence et la solution de K-M lorsque les paramètres parasites sont fixés à zéro. (a) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = y\}$ pour le cas du cisaillement pur (configuration $\{8/8/8\}$), (b) σ_{VM} le long de l'axe $\{x = y\}$ pour le cas de la traction biaxiale (configuration $\{16/0/8\}$).	93
3.11	Schéma (paramètres parasites en gras).	96
4.1	Implémentation du super-élément perforé avec nœuds internes (HT-INT) dans l'architecture du code ZéBuLoN : plugin  , code principal  .	102
4.2	Initialisation du super-élément perforé avec nœuds internes.	104
4.3	Numérotation des nœuds du super-élément perforé à 16 nœuds dont 8 sur la perforation dans ZéBuLoN.	106
4.4	Maillage EF « grossier » contenant un super-élément perforé au centre.	109
4.5	Distribution de la contrainte équivalente de von Mises obtenue à partir du maillage fin standard. (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.	112
4.6	Distribution de la contrainte équivalente de von Mises obtenue avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation. (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.	114
4.7	Distribution de la contrainte équivalente de von Mises obtenue avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation. Comparaison avec le super-élément à 8 nœuds et la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{x = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{x = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = y\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = y\}$.	115

4.8	Erreur relative (%) sur la contrainte équivalente de von Mises obtenue avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation, et avec le super-élément à 8 nœuds, par rapport à la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{x = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{x = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = y\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = y\}$	116
4.9	Distribution de la contrainte équivalente de von Mises le long de la perforation obtenue avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation. Comparaison avec le super-élément à 8 nœuds et la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale, (b) Cisaillement pur, (c) Cisaillement simple.	117
4.10	Distribution de la contrainte équivalente de von Mises obtenue avec le super-élément perforé avec nœuds internes évalué avec une règle d'intégration à 2 points de Gauss par côté (traction biaxiale).	120
4.11	Distribution de la contrainte équivalente de von Mises le long de l'axe $\{x = 0\}$ obtenue avec le super-élément perforé à 16 nœuds internes pour 4, 16, et 32 points de Gauss par côté, et comparaison avec la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.	121
4.12	Erreur relative (%) sur la contrainte équivalente de von Mises calculée en fonction du nombre de points de Gauss par rapport à la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.	122
4.13	Distribution de la contrainte équivalente de von Mises obtenue avec le super-élément à 16 nœuds et une réinterpolation à 32 paramètres. (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.	123
4.14	Comparaison entre une réinterpolation à 16 ou 32 paramètres sur la distribution de la contrainte équivalente de von Mises obtenue avec le super-élément à 16 nœuds. (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{x = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{x = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = y\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = y\}$. . .	124
4.15	Solution particulière analytique d'une plaque perforée soumise à une pression constante uniformément répartie sur le contour du trou de valeur $P = 100$ MPa. (a) Contrainte équivalente de von Mises σ_{VM}^p , (b) Déplacement u_x^p	125

4.16	Résultats obtenus avec le calcul EF fin pour le cas de la pression constante uniformément répartie de valeur $P = 100$ MPa appliquée sur le contour du trou. (a) Contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} , (b) Déplacement u_x .	126
4.17	Déplacement u_x des nœuds externes.	127
4.18	Déplacement u_x des nœuds internes.	127
4.19	Déplacement u_x des nœuds externes multiplié par le coefficient -0.37 .	128
4.20	Déplacement u_x des nœuds internes multiplié par le coefficient 4.23 .	128
4.21	Distribution du déplacement homogène u_x^h obtenue avec le super-élément perforé à 16 nœuds, déterminée à partir des paramètres (α_j, β_j) identifiés dans le Tableau 4.8.	132
4.22	Résultats obtenus avec le super-élément perforé à 16 nœuds lorsque la perforation est soumise à une pression constante uniformément répartie sur le contour du trou de valeur $P = 100$ MPa. Comparaison avec la solution de référence analytique. (a) Contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} dans le domaine perforé et (b) le long de l'axe $\{y = 0\}$, (c) Déplacement u_x dans le domaine perforé et (d) le long de l'axe $\{y = 0\}$.	132
B.1	Historique des travaux de recherche sur la modélisation des assemblages rivetés en calculs de structures à l'Onera, depuis 1991 (haut) jusqu'en 2010 (bas).	156
C.1	Représentation graphique du logarithme complexe. (a) Partie réelle de $\text{Log}(z)$, (b) Partie imaginaire de $\text{Log}(z)$, (c) Surface de Riemann associée au logarithme complexe.	158
D.1	Comparaison des résultats obtenus avec la configuration $\{8/8/8\}$ le long de l'axe $\{x = 0\}$ pour différentes valeurs du ratio L/r_0 . (a) σ_{yy} , (b) u_y .	159
H.1	Distribution de la composante u_x du déplacement obtenue à partir du maillage fin standard. (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.	169
H.2	Distribution de la composante u_x du déplacement obtenue avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation. (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.	170

H.3	Distribution de la composante u_x du déplacement obtenue avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation. Comparaison avec le super-élément à 8 nœuds et la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = 0\}$	171
H.4	Erreur relative (%) sur le déplacement u_x obtenu avec le super-élément à 16 nœuds comportant 8 nœuds sur la perforation, et avec le super-élément à 8 nœuds, par rapport à la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = 0\}$	172
H.5	Distribution du déplacement u_x obtenue avec le super-élément à 16 nœuds pour 4, 16, et 32 points de Gauss par côté, et comparaison avec les résultats de référence. (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = 0\}$	173
H.6	Erreur relative (%) sur le déplacement u_x calculée en fonction du nombre de points de Gauss par rapport à la référence (EF fins). (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = 0\}$	174
H.7	Distribution de la composante u_x du déplacement obtenue avec le super-élément à 16 nœuds et une réinterpolation à 32 paramètres. (a) Traction uniaxiale, (b) Traction biaxiale, (c) Cisaillement pur, (d) Cisaillement simple.	175
H.8	Comparaison de la distribution de la composante u_x du déplacement obtenue avec le super-élément à 16 nœuds réinterpolé avec 16 ou 32 paramètres. (a) Traction uniaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (b) Traction biaxiale le long de l'axe $\{y = 0\}$, (c) Cisaillement pur le long de l'axe $\{x = 0\}$, (d) Cisaillement simple le long de l'axe $\{x = 0\}$	176
I.1	Déplacement u_y des nœuds externes.	178
I.2	Déplacement u_y des nœuds internes.	178
I.3	Déplacement u_y des nœuds externes multiplié par le coefficient -0.37	179
I.4	Déplacement u_y des nœuds internes multiplié par le coefficient 4.23	179

Liste des tableaux

1	Données d'accidentologie pour l'Union Européenne sur la période 2001-2002 (European Transport Safety Council).	1
1.1	Comparatif de méthodes numériques pour la modélisation des tôles perforées dans les calculs de structures. Classement de très mauvais (+) à très bon (+ + + + +) [9].	19
3.1	Erreur relative maximale (%) observée entre la solution de K-M et la solution de référence de Kirsch pour différentes configurations (ordre de grandeur).	81
3.2	Erreur relative maximale (%) observée entre la solution de K-M calculée et la solution de référence générée pour chaque configuration et pour différents cas de chargement (ordre de grandeur).	84
3.3	Informations sur le système linéaire $\mathbf{A}_{ls}\mathbf{c} = \mathbf{b}_{ls}$	88
3.4	Valeur des paramètres (α_j, β_j) de la solution de K-M calculée à partir d'une solution numérique de référence pour la configuration $\{16/0/4\}$ (cisaillement simple).	91
4.1	Déplacements (u_x, u_y) aux 16 nœuds pour la traction uniaxiale (mm). . . .	110
4.2	Déplacements (u_x, u_y) aux 16 nœuds pour la traction biaxiale (mm). . . .	110
4.3	Déplacements (u_x, u_y) aux 16 nœuds pour le cisaillement pur (mm). . . .	111
4.4	Déplacements (u_x, u_y) aux 16 nœuds pour le cisaillement simple (mm). . .	111
4.5	Valeur maximale de σ_{VM} dans le domaine perforé (MPa).	116

4.6	Comparaison du coefficient de concentration de contraintes (K_t).	118
4.7	Déplacements (u_x, u_y) aux 16 nœuds pour le cas de la pression constante uniforme de valeur 100 MPa appliquée à la perforation (mm).	129
4.8	Valeur des paramètres (α_j, β_j) pour la reconstruction de la solution homo- gène ($\mathbf{u}^h, \boldsymbol{\sigma}^h$) (16 paramètres).	131

Super-élément fini de tôles rivetées pour le calcul des structures

La thèse s'inscrit dans un axe de recherche visant à améliorer l'analyse par éléments finis (EF) des structures aéronautiques soumises au crash et à l'impact. L'étude s'intéresse, en particulier, à la modélisation des assemblages rivetés dans les calculs de structures, qui sont des zones de concentrations de contraintes propices à l'initiation de ruptures. Si la rupture de la fixation est maîtrisée, les modes de rupture dus aux perforations sont, quant à eux, difficiles à simuler dans un calcul sur structure complète. Afin de prendre en compte avec précision l'influence des perforations sur la réponse mécanique de telles structures, un super-élément perforé à 8 nœuds a été formulé lors d'une précédente thèse. Cependant, sa frontière interne est analytique et libre de chargement, ce qui rend difficile la connexion avec un élément rivet, et donc la modélisation de l'assemblage. L'étude proposée ici consiste donc à développer un super-élément perforé qui soit capable de tenir compte de l'influence de la perforation sur les champs mécaniques, d'une part, et qui soit formulé de façon à rendre possible l'interaction avec un macro-élément rivet, d'autre part.

Pour répondre à cette problématique, le cadre dans lequel s'inscrit la formulation de super-éléments est présenté dans le premier chapitre. Les concepts nécessaires à la compréhension des fondements théoriques des super-éléments sont présentés, et une synthèse bibliographique de super-éléments comportant un défaut est réalisée. Dans le deuxième chapitre, un nouveau super-élément de plaque perforée qui comporte des nœuds sur la perforation est formulé afin de pouvoir établir l'interaction avec un modèle de fixation utilisé pour le rivet. Pour cela, le principe variationnel du nouvel EF est développé, les fonctions d'interpolation sont déterminées par une méthode de variables complexes et sont choisies de façon à formuler un super-élément perforé comportant 8 nœuds externes et 8 nœuds sur la perforation, et un formalisme permettant d'appliquer des chargements sur la perforation est proposé. Enfin, la matrice de rigidité et le vecteur chargement du nouveau super-élément sont établis. Dans le troisième chapitre, les fonctions d'interpolation du nouveau super-élément sont évaluées. Il est montré qu'elles sont capables de reconstruire les champs mécaniques au voisinage de la perforation. Cependant, une diminution de la précision est observée par rapport à celles du super-élément sans nœuds internes. L'origine de ces imprécisions est identifiée, et des méthodes sont proposées pour remédier à ces écarts. Dans le dernier chapitre, le super-élément perforé à 16 nœuds est implémenté dans ZéBuLoN. Sa capacité à localiser les champs au voisinage de la perforation lorsque des chargements externes ou internes sont appliqués, sa précision, ainsi que son efficacité, sont évaluées. Le super-élément est complètement validé lorsqu'il est soumis à des chargements externes. Par contre, lorsque sa perforation est soumise à une pression constante et uniforme, les résultats présentent des incohérences. Malgré tout, plusieurs points positifs observés sont encourageants ; une perspective immédiate est donc d'améliorer l'implémentation du second membre, et en particulier l'intégration numérique sur la perforation.

Mots-clés : Modélisation des assemblages rivetés, Calculs de structures, Super-élément perforé, Interaction.

Super-element for riveted plates in structural computations

The thesis is made in a context which consists in improving the finite element (FE) analysis of full-scale aircraft structures subjected to crash and impact loadings. The study is focused, in particular, on the riveted assemblies modeling in structural computations, which are stress concentrations areas where ruptures initiation can occur. If the fastener rupture is mastered, the rupture modes due to perforations are, however, difficult to simulate in a complete structure computation. In order to accurately take into account the perforations influence on the mechanical response of such structures, a perforated super-element featuring 8 nodes have been formulated in a previous thesis. Nevertheless, its internal boundary is analytic and free of loads, which makes difficult the connection with a rivet element, and consequently the assembly modeling. The study proposed here consists in the development of a perforated super-element which is, on the one hand, able to take into account the perforation influence on the mechanical fields, and which is, on the other hand, formulated such as the interaction with a rivet macro-element is possible.

In order to deal with these issues, the framework in which the formulation of super-elements takes place is presented in the first chapter. The concepts necessary to the theoretical foundations understanding of super-elements are presented, and a literature review on super-elements featuring defects is made. In the second chapter, a new perforated plate super-element featuring nodes on the hole boundary is formulated in order to establish the interaction with a fastener model used for the rivet. To this end, the variational principle of the new FE is developed, the interpolation functions are defined with a complex variables method and are chosen in order to formulate a perforated super-element featuring 8 external nodes and 8 nodes on the hole boundary, and a formalism making the hole boundary loading possible is proposed. Finally, the stiffness matrix and the load vector of the new super-element are established. In the third chapter, the new super-element interpolation functions are evaluated. It is shown that they are able to describe the mechanical fields in the hole vicinity. However, a decrease in the accuracy is observed in comparison with the ones of the super-element without internal nodes. The inaccuracies origin is identified, and methods to correct them are proposed. In the last chapter, the 16-node perforated super-element is implemented in ZéBuLoN. Its capability to localise the fields in the hole vicinity when external and internal loadings are applied, its accuracy, and also its efficiency, are assessed. However, when the hole boundary is subjected to a constant and uniform pressure, the results are inconsistent. Nevertheless, some positive points observed are encouraging ; so, an outlook is to improve the load vector implementation, and particularly the numerical integration on the hole boundary.

Keywords : Riveted assembly modeling, Full-scale structural computations, Perforated super-element, Interaction.